MA - Soluzioni dell'esame scritto del 7-9-2015

1. Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$2(x^2 + y^2) + z^2 = R^2,$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm R)$ tramite due molle di costante elastica k.

(a) Si parametrizzi l'ellissoide usando coordinate cilindriche, i.e., nella forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho(z)\cos\theta \\ \rho(z)\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

con $\rho(z) = \sqrt{\frac{R^2-z^2}{2}}$, $z \in [-R, R]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Si scriva quindi la Lagrangiana del sistema in termini delle coordinate (z, θ) e delle loro derivate.

(b) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

(c) Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica e si identifichi il momento conservato corrispondente (si chiami A il suo valore). Usando la legge di conservazione di tale momento, si esprima $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$.

(d) Si scriva l'espressione dell'energia meccanica E del sistema. Si sostituisca l'espressione di $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$ ricavata al punto precedente in quella dell'energia meccanica, e si esprima quest'ultima in termini di A e delle sole variabili $(z, \dot{z})$. Si identifichi quindi il potenziale efficace $V_{eff}(z)$.

(e) Si determini l'equazione delle curve di livello nel piano $(z, \dot{z})$ e se ne disegni il grafico, per $A > 0$ fissato, al variare dell'energia E. Si discuta la natura qualitativa del moto della variabile z.

(f) Si determinino le condizioni sui dati iniziali affinché il moto *complessivo* del sistema sia periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito. Esistono dati iniziali per cui il moto complessivo non è periodico? Se sì, qual è la natura di tali moti non periodici?

Soluzione.

(a) Usando la paramterizzazione suggerita troviamo che la velocità della particella è

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{z}\begin{pmatrix} \frac{-z}{\sqrt{2(R^2-z^2)}}\cos\theta \\ \frac{-z}{\sqrt{2(R^2-z^2)}}\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{R^2-z^2}{2}}\sin\theta \\ \sqrt{\frac{R^2-z^2}{2}}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

cosicché l'energia cinetica in termini di $(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta})$ ha la forma:

$$\begin{aligned} T = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 &= \frac{m}{2}\dot{z}^2\Big(\frac{z^2}{2(R^2-z^2)}+1\Big) + \frac{m}{2}\frac{(R^2-z^2)}{2}\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{m}{2}\dot{z}^2\,\frac{R^2-\frac{z^2}{2}}{R^2-z^2} + \frac{m}{4}(R^2-z^2)\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

L'energia potenziale gravitazionale è semplicemente $U_g = mgz$, mentre quella elastica è (usando di nuovo la parametrizzazione suggerita per $\mathbf{x}$)

$$\begin{aligned} U_{el} &= \frac{1}{2}k\Big[|\mathbf{x}-(0,0,R)|^2 + |\mathbf{x}-(0,0,-R)|^2\Big] = k(|\mathbf{x}|^2+R^2) \\ &= k\Big(\frac{R^2-z^2}{2}+z^2+R^2\Big) = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{3}{2}kR^2 \end{aligned}$$

La Lagrangiana risultante si ottiene sottraendo all'espressione dell'energia cinetica T quelle di U_g e U_{el}, cosicché, a meno di una costante additiva (irrilevante per i calcoli successivi),

$$\mathcal{L}(z,\theta,\dot{z},\dot{\theta}) = \frac{m}{2}\dot{z}^2\,\frac{R^2-\frac{z^2}{2}}{R^2-z^2} + \frac{m}{4}(R^2-z^2)\dot{\theta}^2 - mgz - \frac{1}{2}kz^2.$$

(b) Le equazioni di Eulero-Lagrange associate a $\mathcal{L}$ sono:

$$\frac{d}{dt}\Big(m\dot{z}\,\frac{R^2-\frac{z^2}{2}}{R^2-z^2}\Big) = \frac{m}{2}\dot{z}^2\Big(\frac{-z}{R^2-z^2}+2z\frac{R^2-\frac{z^2}{2}}{(R^2-z^2)^2}\Big) - \frac{m}{2}z\dot{\theta}^2 - mg - kz$$

e

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m}{2}(R^2-z^2)\dot{\theta}\Big) = 0 \iff \frac{m}{2}(R^2-z^2)\ddot{\theta} - mz\dot{z}\dot{\theta} = 0.$$

La prima equazione si può semplificare nella forma:

$$m\ddot{z}\,\frac{R^2-\frac{z^2}{2}}{R^2-z^2} = -\frac{mR^2}{2}\frac{z\dot{z}^2}{(R^2-z^2)^2} - \frac{m}{2}z\dot{\theta}^2 - mg - kz$$

mentre la seconda è la legge di conservazione associata alla variabile ciclica θ.

(c) Come già osservato al punto precedente, la variabile θ è ciclica, e la legge di conservazione associata al suo momento coniugato (corrispondente alla seconda equazione di Eulero-Lagrange derivata sopra) si può scrivere nella forma:

$$\frac{m}{2}(R^2 - z^2)\dot{\theta} = A$$

da cui

$$\dot{\theta} = \frac{2A}{m(R^2 - z^2)}.$$

(d) L'espressione dell'energia meccanica E del sistema in termini delle variabili $(z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta})$ è

$$E = \frac{m}{2}\dot{z}^2 \, \frac{R^2 - \frac{z^2}{2}}{R^2 - z^2} + \frac{m}{4}(R^2 - z^2)\dot{\theta}^2 + mgz + \frac{1}{2}kz^2.$$

Sostituendo in tale equazione l'espressione di $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$ ricavata al punto precedente troviamo

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{z}^2 \, \frac{R^2 - \frac{z^2}{2}}{R^2 - z^2} + \frac{m}{4}(R^2 - z^2)\frac{4A^2}{m^2(R^2 - z^2)^2} + mgz + \frac{1}{2}kz^2 \\ &= \frac{m}{2}\dot{z}^2 \, \frac{R^2 - \frac{z^2}{2}}{R^2 - z^2} + \frac{A^2}{m(R^2 - z^2)} + mgz + \frac{1}{2}kz^2 \\ &\equiv \frac{m}{2}\dot{z}^2 \, \frac{R^2 - \frac{z^2}{2}}{R^2 - z^2} + V_{eff}(z), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto il potenziale efficace $V_{eff}(z)$:

$$V_{eff}(z) = \frac{A^2}{m(R^2 - z^2)} + mgz + \frac{1}{2}kz^2.$$

Il grafico di $V_{eff}(z)$ per $A > 0$ è riportato in Fig.1.

(e) L'equazione delle curve di livello nel piano $(z, \dot{z})$ è

$$\dot{z} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\frac{(R^2 - z^2)}{(R^2 - \frac{z^2}{2})}(E - V_{eff}(z))}$$

il cui grafico, per $A > 0$ fissato, al variare dell'energia E, è riportato in Fig.2. Come evidente dalla struttura delle curve di livello, il sistema ammette un unico punto di equilibrio stabile z_{eq} (che

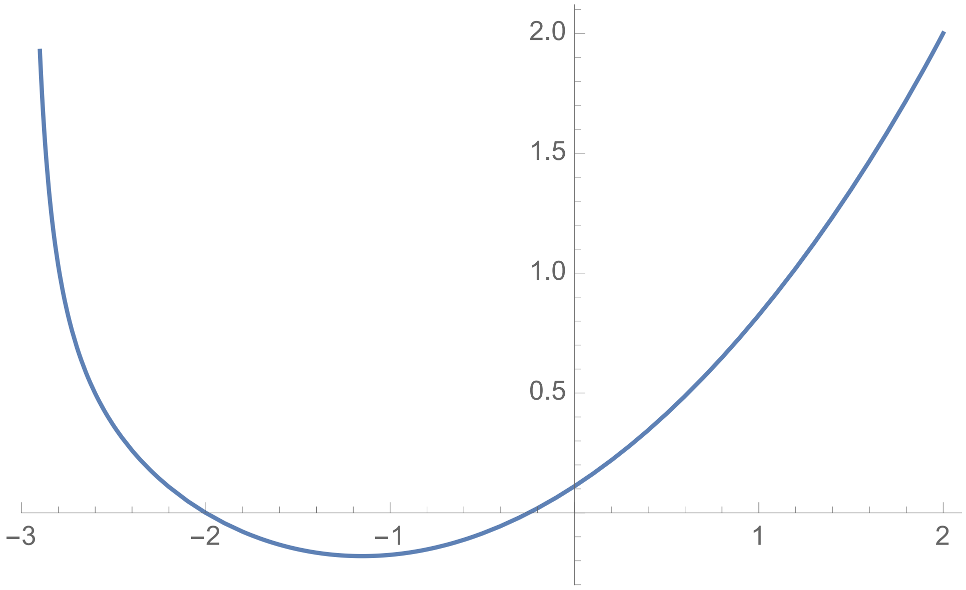

Figura 1: Grafico di $V_{eff}(z)$ per $A > 0$.

è l'unico zero dell'equazione $V'_{eff}(z) = 0$, ed è negativo per ogni scelta di $A > 0$). Tutti i moti del sistema sono periodici e (a parte il moto "banale" corrispondente a $z(t) \equiv z_{eq}$) consistono in oscillazioni finite attorno a z_{eq}, di periodo

$$T_1 = 2 \int_{z_-}^{z_+} \sqrt{\frac{m(R^2 - \frac{z^2}{2})}{2(R^2 - z^2)(E - V_{eff}(z))}}\, dz$$

dove $z_\pm$ sono i due zeri di $E = V_{eff}(z)$, con $E > V_{eff}(z_{eq})$.

(f) Il caso più semplice in cui il moto complessivo del sistema è periodico è quello in cui il moto della variabile z è banale, i.e., $z(t) \equiv z_{eq}$, nel qual caso la frequenza angolare corrispondente al moto di θ è costante, $\dot{\theta} = \frac{2A}{m(R^2 - z_{eq}^2)}$, e di conseguenza il moto complessivo è periodico di periodo $T = \frac{\pi m(R^2 - z_{eq}^2)}{A}$.
Se invece il moto della variabile z è periodico non banale, allora la condizione affinché il moto *complessivo* del sistema sia periodico è che il moto della variabile θ, che in generale è quasi-periodico a due periodi T_1 e T_2, sia periodico esso stesso. Perché il moto della variabile θ (e di conseguenza anche il moto complessivo) sia periodico, dobbiamo imporre che il periodo T_2 sia uguale a un multiplo *razionale* di T_1. L'espressione per T_2 si ottiene dalla

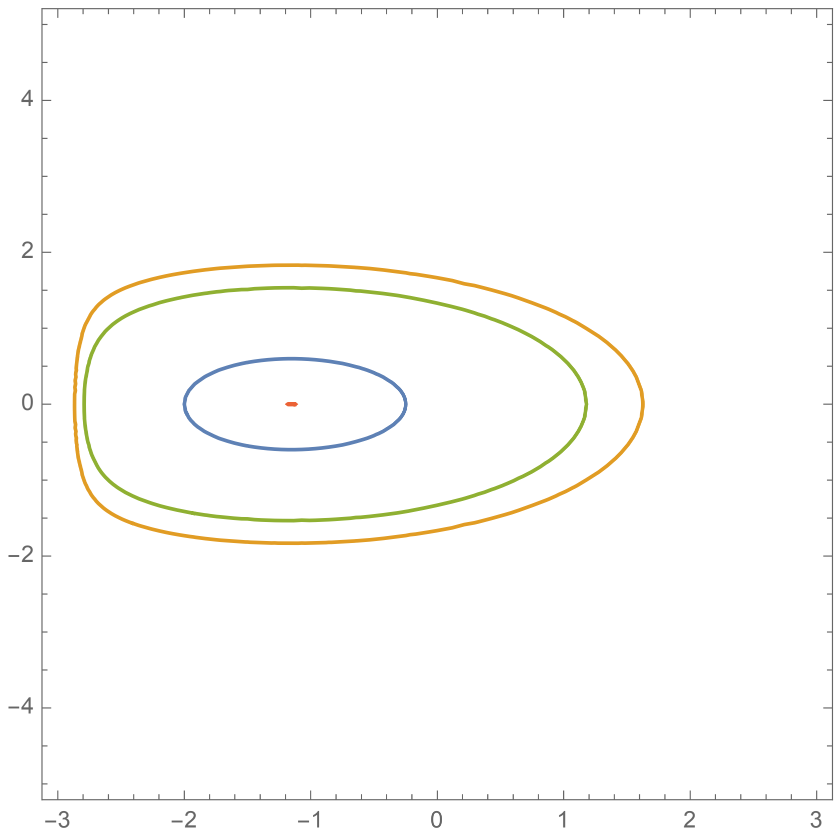

Figura 2: Grafico delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(z, \dot{z})$.

formula

$$\frac{2\pi}{T_2} = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} \frac{2A}{m(R^2 - z^2(t))}dt =$$
$$= \frac{2}{T_1}\int_{z_-}^{z_+} \frac{2A}{m(R^2 - z^2(t))}\sqrt{\frac{m(R^2 - \frac{z^2}{2})}{2(R^2 - z^2)(E - V_{eff}(z))}}\, dz$$

cosicché la condizione affinché il moto complessivo sia periodico prende la forma

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\pi}\int_{z_-}^{z_+} \frac{2A}{m(R^2 - z^2)}\sqrt{\frac{m(R^2 - \frac{z^2}{2})}{2(R^2 - z^2)(E - V_{eff}(z))}}\, dz = \frac{n_1}{n_2},$$

per due interi n_1, n_2 primi tra loro. Se tale condizione è soddisfatta, il periodo del moto risultante è $T = n_2 T_1 = n_1 T_2$.

Se invece il secondo periodo, T_2, del moto della variabile θ non è un multiplo razionale di T_1, allora il moto complessivo è quasi-periodico a due periodi, e la traiettoria risultante riempie densamente una regione bidimensionale dello spazio.

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{4q^2} - q\dot{q} - \log^2 q,$$

con $q > 0$.

(a) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange del sistema.

(b) Si determinino l'Hamiltoniana $H(q, p)$ coniugata a $\mathcal{L}$ e le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(c) Per semplificare l'Hamiltoniana trovata, si usi una trasformazione di coordinate della forma

$$\begin{cases} Q = q^2 + qp \\ P = f(q) \end{cases}$$

con $f(1) = 0$. Per quale scelta di $f(q)$ tale trasformazione è canonica?

(d) Si identifichi una funzione generatrice di prima specie per la trasformazione canonica trovata al punto precedente.

(e) Usando la trasformazione canonica trovata ai punti precedenti, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q, P)$ nelle nuove coordinate, si risolvano le equazioni di Hamilton corrispondenti, e si riesprima la soluzione nelle variabili originali (q, p).

(f) Si verifichi esplicitamente che la soluzione $q(t)$ trovata risolve l'equazione di Eulero-Lagrange originale.

Soluzione.

(a) L'equazione di Eulero-Lagrange del sistema è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}}{2q^2} - q\right) = -\frac{\dot{q}^2}{2q^3} - \dot{q} - 2\frac{\log q}{q}$$

che semplificando si può riscrivere nella forma

$$\frac{\ddot{q}}{2q^2} = \frac{\dot{q}^2}{2q^3} - 2\frac{\log q}{q}$$

o equivalentemente

$$\ddot{q} = \frac{\dot{q}^2}{q} - 4q\log q.$$

(b) Tenendo conto del fatto che il momento coniugato a q è

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{2q^2} - q \iff \dot{q} = 2q^2(q+p)$$

troviamo che l'Hamiltoniana coniugata a $\mathcal{L}$ è

$$\begin{aligned} H(q,p) &= p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q})\Big|_{\dot{q}=2q^2(q+p)} \\ &= (q+p)\dot{q} - \frac{\dot{q}^2}{4q^2} + \log^2 q\Big|_{\dot{q}=2q^2(q+p)} \\ &= (q^2+qp)^2 + \log^2 q. \end{aligned}$$

Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono

$$\begin{cases} \dot{q} = 2q^2(q+p) \\ \dot{p} = -4q^3 - 6q^2p - 2qp^2 - 2\frac{\log q}{q} \end{cases}.$$

(c) Affinchè la trasformazione

$$\begin{cases} Q = q^2 + qp \\ P = f(q) \end{cases}$$

sia canonica deve valere la condizione che $\{Q, P\} = 1$, o equivalentemente che il determinante Jacobiano sia uguale a 1. Nel nostro caso tale condizione corrisponde a

$$-qf'(q) = 1 \iff f'(q) = -\frac{1}{q} \implies f(q) = f(1) - \log q,$$

che, imponendo come richiesto che $f(1) = 0$, si riduce a $f(q) = -\log q$. Quindi la trasformazione

$$\begin{cases} Q = Q(q,p) = q^2 + qp \\ P = P(q,p) = -\log q \end{cases}$$

è canonica. Tale trasformazione mappa in modo invertibile il semipiano $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ nell'intero piano $\mathbb{R}^2$, e la trasformazione inversa è

$$\begin{cases} q = q(Q,P) = e^{-P} \\ p = p(Q,P) = Qe^P - e^{-P} \end{cases}.$$

(d) Cerchiamo una funzione generatrice di prima specie che generi la trasformazione canonica trovata al punto precedente, i.e., cerchiamo $F(q,Q)$ tale che

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{Q}{q} - q \\ P = -\frac{\partial F}{\partial q} = -\log q \end{cases} .$$

Integrando la seconda equazione troviamo $F(q,Q) = Q\log q + g(q)$ e imponendo la prima equazione troviamo $g'(q) = -q$, da cui $g(q) = -q^2/2+\text{cost}$. Una funzione generatrice di prima specie della trasformazione canonica trovata al punto precedente è quindi

$$F(q,Q) = Q\log q - \frac{q^2}{2}$$

(e) Usando la trasformazione canonica trovata sopra, troviamo subito che l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P)$ nelle nuove coordinate è semplicemente

$$\tilde{H}(Q,P) = Q^2 + P^2$$

le cui equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = 2P \\ \dot{P} = -2Q \end{cases}$$

da cui, eliminando la P, troviamo $\ddot{Q} = -4Q$. Tali equazioni sono quelle di un oscillatore armonico, la cui soluzione è $Q(t) = A\cos(2t+\phi)$, dove le costanti A, ϕ vano fissate in funzione dei dati iniziali Q_0, P_0. Si noti anche che $P(t) = \frac{1}{2}\dot{Q}(t) = -A\sin(2t+\phi)$. Usando la trasformazione canonica $q = e^{-P}$, $p = Qe^{P} - e^{-P}$ possiamo tradurre tale soluzione in termini delle variabili originali, e troviamo:

$$\begin{cases} q = e^{A\sin(2t+\phi)} \\ p = A\cos(2t+\phi)e^{-A\sin(2t+\phi)} - e^{A\sin(2t+\phi)} \end{cases}$$

(f) Usando l'espressione esplicita di $q(t) = e^{A\sin(2t+\phi)}$ trovata al punto precedente, possiamo facilmente verificare che tale soluzione verifica l'equazione di Eulero-Lagrange originale, i.e., $\ddot{q} = \dot{q}^2/q - 4q\log q$. A tale scopo, notiamo che

$$\dot{q}(t) = 2A\cos(2t+\phi)e^{A\sin(2t+\phi)} = 2A\cos(2t+\phi)q(t)$$

e

$$\ddot{q}(t) = -4A\sin(2t+\phi)q(t) + 2A\cos(2t+\phi)\dot{q}(t),$$

cosicché, ricordando che $A\sin(2t+\phi) = \log q(t)$ e $2A\cos(2t+\phi) = \dot{q}/q$, troviamo

$$\ddot{q}(t) = -4q(t)\log q(t) + \frac{\dot{q}^2(t)}{q(t)},$$

come desiderato.