MA - Esame scritto (7-9-2015)

1. Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a muoversi su una superficie ellissoidale di equazione

$$2(x^2 + y^2) + z^2 = R^2,$$

sottoposto all'azione della gravità e collegato agli estremi dell'ellissoide $(0, 0, \pm R)$ tramite due molle di costante elastica k.

(a) Si parametrizzi l'ellissoide usando coordinate cilindriche, i.e., nella forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho(z)\cos\theta \\ \rho(z)\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

con $\rho(z) = \sqrt{\frac{R^2-z^2}{2}}$, $z \in [-R, R]$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Si scriva quindi la Lagrangiana del sistema in termini delle coordinate (z, θ) e delle loro derivate.

(b) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

(c) Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica e si identifichi il momento conservato corrispondente (si chiami A il suo valore). Usando la legge di conservazione di tale momento, si esprima $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$.

(d) Si scriva l'espressione dell'energia meccanica E del sistema. Si sostituisca l'espressione di $\dot{\theta}$ in termini di $A, z, \dot{z}$ ricavata al punto precedente in quella dell'energia meccanica, e si esprima quest'ultima in termini di A e delle sole variabili $(z, \dot{z})$. Si identifichi quindi il potenziale efficace $V_{eff}(z)$.

(e) Si determini l'equazione delle curve di livello nel piano $(z, \dot{z})$ e se ne disegni il grafico, per $A > 0$ fissato, al variare dell'energia E. Si discuta la natura qualitativa del moto della variabile z.

(f) Si determinino le condizioni sui dati iniziali affinché il moto *complessivo* del sistema sia periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito. Esistono dati iniziali per cui il moto complessivo non è periodico? Se sì, qual è la natura di tali moti non periodici?

2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{4q^2} - q\dot{q} - \log^2 q,$$

con $q > 0$.

(a) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange del sistema.

(b) Si determinino l'Hamiltoniana $H(q,p)$ coniugata a $\mathcal{L}$ e le equazioni di Hamilton corrispondenti.

(c) Per semplificare l'Hamiltoniana trovata, si usi una trasformazione di coordinate della forma

$$\begin{cases} Q = q^2 + qp \\ P = f(q) \end{cases}$$

con $f(1) = 0$. Per quale scelta di $f(q)$ tale trasformazione è canonica?

(d) Si identifichi una funzione generatrice di prima specie per la trasformazione canonica trovata al punto precedente.

(e) Usando la trasformazione canonica trovata ai punti precedenti, si determini l'Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P)$ nelle nuove coordinate, si risolvano le equazioni di Hamilton corrispondenti, e si riesprima la soluzione nelle variabili originali (q,p).

(f) Si verifichi esplicitamente che la soluzione $q(t)$ trovata risolve l'equazione di Eulero-Lagrange originale.