5^o tutorato - MA - 30/3/2015

Esercizio 1 Tra tutte le curve che passano per due punti A e B in un piano verticale (con B ad un'altezza minore o uguale di quella di A), determinare quella che gode della proprietà seguente: una particella inizialmente in quiete in A che si cade lungo di essa sotto l'influenza della gravità e in assenza di attrito impiega il tempo minimo per raggiungere B (tale curva si dice *brachistocrona*).

A tale scopo, una volta fissato un sistema di coordinate come in Figura 1.

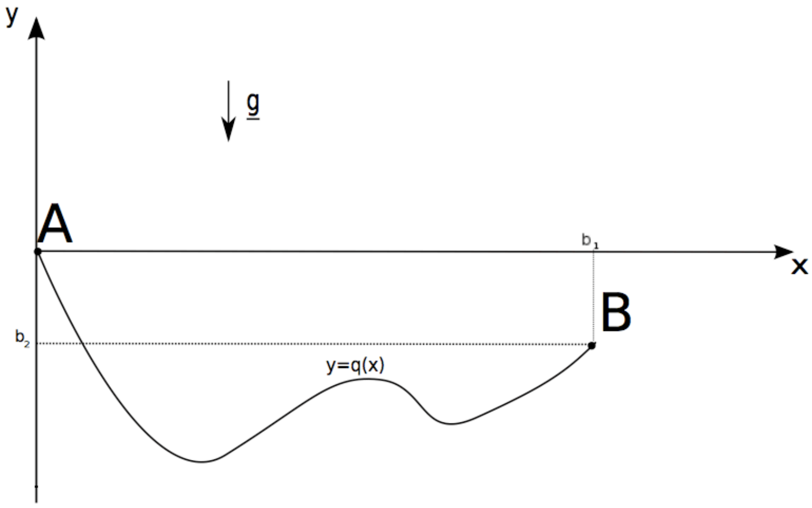

Figura 1: Sistema di coordinate

- Si mostri che il problema corrisponde a minimizzare il funzionale

$$A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x))dx \, , \qquad \mathcal{L}(q(x), \dot{q}(x)) := \sqrt{\frac{1+\dot{q}^2}{-2gq}}$$

  nello spazio delle curve $\mathcal{M}_{0,b_1}(0, b_2)$. Qui $\boldsymbol{g} = (0, -g)$ è l'accelerazione di gravità, $y = q(x)$ rappresenta il profilo della curva, $A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q)$ ha il significato fisico di "tempo necessario a percorrere la curva $y = q(x)$ da A a B", e il puntino in $\dot{q}(x)$ rappresenta la derivata rispetto a x. [Suggerimento: si usi la conservazione dell'energia meccanica $E = \frac{m}{2}v(x)^2 + mgq(x)$ per ricavare la velocità della particella nel punto $(x, q(x))$, e quindi il tempo di percorrenza.]

- Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange per la curva ottimale.

- Mostrare che tale equazione è risolta da una *cicloide* con cuspide nel punto di partenza. [Suggerimento: si ricordi che l'equazione parametrica di una cicloide con cuspide nell'origine è

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

  da cui si vede che la sua equazione cartesiana ha la forma $y = r(1 - \cos\varphi(x/r))$ dove $\varphi = h^{-1}$ è la funzione inversa di $h(t) = t - \sin t$.]

Esercizio 2 Determinare la forma che assume una corda pesante di lunghezza ℓ, i cui estremi sono fissati nei punti A e B del piano verticale $x-y$ (tale forma definisce una curva chiamata *catenaria*). A tale scopo, si determini la curva passante in A e B che minimizza l'energia potenziale gravitazionale, tra tutte quelle a lunghezza fissata ℓ. Si fissi il sistema di coordinate come in Figura 1 e si proceda come segue.

- Si mostri che il problema corrisponde a minimizzare il funzionale

$$A^{\mathcal{L}}_{0,b_1}(q) = \int_0^{b_1} \mathcal{L}(q(x),\dot{q}(x))dx \,, \qquad \mathcal{L}(q(x),\dot{q}(x)) := -(\lambda - g\rho q)\sqrt{1+\dot{q}^2}$$

  nello spazio delle curve $\mathcal{M}_{0,b_1}(0,b_2)$. Qui $\boldsymbol{g}=(0,-g)$ è l'accelerazione di gravità, ρ la densità lineare della corda, e λ una costante (moltiplicatore di Lagrange) che va fissata in modo tale che la lunghezza totale della curva $\int_0^{b_1}\sqrt{1+\dot{q}^2(x)}dx$ sia uguale ad ℓ. [Suggerimento: si osservi che l'energia potenziale gravitazionale di un elemento $d\ell$ di curva attorno a $(x,q(x))$ è $\rho g\sqrt{1+\dot{q}^2(x)}dx$.]

- Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange per la curva ottimale.

- Mostrare che tale equazione è risolta da un coseno iperbolico di ampiezza opportuna.

Esercizio 3 Si consideri il problema dei due corpi, i.e., il moto in campo centrale di due particelle di massa m_1, m_2 che si attraggono con la forza generata dal potenziale gravitazionale $V(\rho) = -k/\rho$ con $k>0$. Si verifichi che, in aggiunta agli integrali primi E ed L, il moto relativo ammette un'ulteriore grandezza conservata, definita in termini del *vettore di Runge-Lenz* $\mathbf{A} = \mu\dot{\mathbf{r}}\wedge\mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}}$. In particolare, si verifichi che: (i) le tre componenti di $\mathbf{A}$ sono integrali primi del moto; (ii) $\mathbf{A}$ è ortogonale a $\mathbf{L}$; (iii) $|\mathbf{A}|^2$ è una funzione di E e di L. Quindi $\mathbf{A}$ definisce una sola grandezza conservata aggiuntiva oltre E ed $\mathbf{L}$, che può essere scelta come l'angolo tra $\mathbf{A}$ ed un asse di riferimento sul piano dell'orbita.

Usando la conservazione di $\mathbf{A}$, si determini l'equazione della traiettoria in coordinate polari. In particolare, si scriva $\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{r}\cdot(\mu\dot{\mathbf{r}}\wedge\mathbf{L} - \mu k\hat{\mathbf{r}})$ in coordinate polari e si riconosca che tale equazione è equivalente a $\rho(1+e\cos(\theta-\theta_0)) = L^2/\mu k$, con $e = |\mathbf{A}|/\mu k$. Nel caso $0\le e<1$ si è già verificato a lezione che $\rho=\rho(\theta)$ descrive al variare di θ il luogo dei punti la cui somma delle distanze da due punti detti fuochi (uno dei quali coincidente con l'origine) è costante (ellisse). Nei casi in cui $e\ge 1$, si verifichi esplicitamente che l'equazione $\rho(\theta) = \rho_0/(1+e\cos(\theta-\theta_0))$ descrive una conica con uno dei fuochi centrato nell'origine, i.e., si verifichi che:

1. per $e=1$, $\rho=\rho(\theta)$ descrive al variare di θ il luogo dei punti equidistante dall'origine e da una retta non passante per l'origine detta direttrice (parabola);

2. per $e>1$, $\rho=\rho(\theta)$ descrive al variare di θ il luogo dei punti la cui differenza delle distanze da due punti detti fuochi (uno dei quali coincidente con l'origine) è costante (iperbole).