Esercizio 1 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Per quali scelte di α è la matrice diagonalizzabile? Per tali valori di α, calcolare gli autovalori e gli autovettori al variare del parametro α.
- Per quei valori di α tali che la matrice è diagonalizzabile, trovare la soluzione generale del sistema. Scelto a piacere uno tra questi valori di α, trovare la soluzione particolare del sistema per $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- *Facoltativo: studiare il sistema per quei valori di α tali che la matrice non è diagonalizzabile.*

Esercizio 2 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Per quali scelte di α è la matrice diagonalizzabile? Per tali valori di α, calcolare gli autovalori e gli autovettori al variare del parametro α.
- Per quei valori di α tali che la matrice è diagonalizzabile, trovare la soluzione generale del sistema. Scelto a piacere uno tra questi valori di α, trovare la soluzione particolare del sistema per $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- *Facoltativo: studiare il sistema per quei valori di α tali che la matrice non è diagonalizzabile.*

Esercizio 3 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

e si determini la soluzione generale del sistema.

Esercizio 4 Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2 \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3 + 1 \end{cases}$$

- Si stabilisca se il sistema ammette un punto fisso, ovvero si stabilisca se esiste un dato iniziale $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ il cui moto corrispondente è costante: $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}_0$.
- Si trovi la soluzione generale del sistema.

Esercizio 5 Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 + 5x_3 \end{cases}$$

con dato iniziale generico $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ e se ne trovi la soluzione.

Esercizio 6 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = -\frac{x^4}{4} + \alpha\frac{x^2}{2}$.

- Trovare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità usando il criterio del linearizzato.
- *Facoltativo: in quali casi non è possibile studiare il criterio del linearizzato? In questi casi, studiare la stabilità.*
  SUGGERIMENTO: usare la conservazione dell'energia meccanica.

Esercizio 7 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x).$$

$V(x) = \frac{x^3}{3} - x$.

- Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità usando il criterio del linearizzato.
- *Facoltativo: in quali casi non è possibile studiare il criterio del linearizzato? In questi casi, studiare la stabilità.*
  SUGGERIMENTO: usare la conservazione dell'energia meccanica.