Esercizio 1 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = x^3 - x$.

1. Scrivere esplicitamente l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica $E = \dot{x}^2/2 + V(x)$.

2. Studiare qualitativamente il moto, procedendo nel modo seguente:

   (a) Si disegni il grafico dell'energia potenziale.

   (b) Si identifichino due punti di equilibrio, $x_1 < x_2$, e se ne discuta la stabilità. Si identifichino in particolare i *valori critici dell'energia*, i.e., i valori dell'energia E_1, E_2 corrispondenti ai punti di equilibrio x_1, x_2.

   (c) Si disegnino le curve di livello Σ_E al variare dell'energia E: si inizino a disegnare Σ_{E_1} e Σ_{E_2}, e poi le curve corrispondenti a valori rappresentativi di E (una per $E > E_1$, una per $E_2 < E < E_1$, una per $E < E_2$).

   (d) Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.

3. Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.

4. Si consideri il moto periodico ad energia nulla, $E = 0$. Trovare due costanti, T_1 e T_2, tali che il periodo T di tale moto sia stimato dall'alto e dal basso:

$$T_1 < T < T_2. \tag{1}$$

   a meno di un errore del 20%[1]. [**Suggerimento**: *Si noti che la funzione integranda nell'integrale definito che definisce T è proporzionale a $1/\sqrt{x(1-x)(x+1)}$ e che sull'intervallo di definizione del moto periodico tale quantità si può stimare dal basso e dall'alto rimpiazzando $(x+1)$ con $(x_+ + 1)$ e $(x_- + 1)$, rispettivamente, dove $x_- = 0, x_+ = 1$ sono i punti di inversione del moto. In tal modo ci si riduce al calcolo di $\int_0^1 dx/\sqrt{x(1-x)}$, che si risolve col cambio di variabili $x = \sin^2 t$.*]

5. Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?

[1] Ovvero tali che $\frac{M-m}{M+m} < 0.2$.

Esercizio 2 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto a un potenziale $V(\theta)$

$$\ddot{\theta} = -V'(\theta) \tag{2}$$

dove $V(\theta) = \omega^2(1 - \cos\theta)$, $\omega \in \mathbb{R}$ (modello del *pendolo matematico*). A complemento della soluzione per quadrature discussa a lezione, si studi in dettaglio il moto sulla separatrice:

1. Si fissi l'energia al valore critico $E = 2\omega^2$, e si fissi un dato iniziale arbitrario sul ramo superiore della curva di livello critica (e.g., $(\theta_0, \dot{\theta}_0) = (0, 2\omega)$).
2. Si scriva la soluzione per quadrature (a priori in forma implicita) e si risolva esplicitamente l'integrale definito coinvolto.
3. Si inverta la funzione così calcolata e si scriva la soluzione *esplicita* per il moto sulla separatrice. Si noti che il moto è definito globalmente, e che nel limite $t \to \pm\infty$ il moto tende al punto di equilibrio instabile.

Esercizio 3 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$.

- Scrivere esplicitamente l'equazione del moto. Si esibisca una quantità conservata del moto.
- Studiare qualitativamente il moto:
  1. Disegnare il grafico di $V(x)$
  2. Disegnare le curve di livello al variare del valore della quantità conservata.
  3. Identificare i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.
  4. Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
- Si risolva *esplicitamente* il moto sulla separatrice
- Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?

Esercizio 4 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$:

$$\ddot{x} = -V'(x),$$

dove $V(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2}$.

- Scrivere esplicitamente l'equazione del moto. Si esibisca una quantità conservata del moto.
- Studiare qualitativamente il moto:
  1. Disegnare il grafico di $V(x)$
  2. Disegnare le curve di livello al variare del valore della quantità conservata.
  3. Identificare i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.
  4. Calcolare il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.
- Si fissi un dato iniziale corrispondente ad un moto aperto: il tempo in cui il punto raggiunge l'infinito è finito o no? Il moto esiste globalmente?