3^o tutorato - MA - 11/3/2015

Esercizio 1 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale $V(x)$

$$\ddot{x} = x(1 + x^2)^\alpha \tag{1}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiare qualitativamente il moto, procedendo nel modo seguente:

1. Si ricostruisca la forma del potenziale $V(x)$, sapendo che $\ddot{x} = -V'(x)$.
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
3. Si identifichino i punti di equilibrio, e se ne discuta la stabilità. Si identifichino in particolare i *valori critici dell'energia*, i.e., i valori dell'energia corrispondenti ai punti di equilibrio.
4. Si disegnino le curve di livello Σ_E al variare dell'energia E: si inizino a disegnare corrispondenti ai valori critici dell'energia, e poi le curve corrispondenti a valori rappresentativi di E.
5. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.
6. Si discuta al variare di α se le soluzioni aperte (i.e., tali che $x(t)$ non rimane limitato) sono globali nel tempo o no.

Esercizio 2 Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$

$$\ddot{x} = -V'(x), \tag{2}$$

soggetto ad un potenziale

$$V(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ per } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Studiare qualitativamente il moto, procedendo nel modo seguente:

1. Si disegni il grafico dell'energia potenziale.
2. Si identifichino due punti di equilibrio, e se ne discuta la stabilità. Si identifichino in particolare i *valori critici dell'energia*, i.e., i valori dell'energia corrispondenti ai punti di equilibrio.
3. Si disegnino le curve di livello Σ_E al variare dell'energia E: si inizino a disegnare corrispondenti ai valori critici dell'energia, e poi le curve corrispondenti a valori rappresentativi di E.
4. Discutere la stabilità del punto $(0, 0)$
5. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a (qualora esistano) moti periodici, moti aperti, moti chiusi aperiodici.

Esercizio 3 (Lennard - Jones) Considerare il moto di un punto materiale di massa $m = 1$

$$m\ddot{x} = -V'(x), \tag{4}$$

soggetto ad un potenziale

$$V(x) = V_0\left(\left(\frac{x_0}{x}\right)^{12} - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{6}\right) \tag{5}$$

dove $V_0, x_0 > 0$.

1. Studiare qualitativamente il moto, procedendo come descritto nell'esercizio 1 (si disegni il grafico di V, quindi delle curve di livello al variare di E, etc.)

2. Scrivere il periodo dei moti periodici in forma di integrale definito.

3. Scelto un dato iniziale x_i corrispondente ad un moto aperto: il tempo che il sistema impiega per arrivare da x_i a infinito è finito o no? Il moto è definito globalmente?

Esercizio 4 (Piccole Oscillazioni)

PARTE UNO Considerare l'oscillatore armonico

$$m\ddot{x} = -kx = -V'(x), \tag{6}$$

con $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si disegnino le curve di livello del sistema. Come noto, tutti i moti del sistema sono periodici di periodo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Si verifichi questo fatto procedendo nel modo seguente: si fissi un valore dell'energia $E > 0$; si calcoli il periodo del moto corrispondente in termini si un integrale definito (si calcolino in particolare i punti di inversione $x_\pm(E)$, che appaiono come estremi di integrazione); si calcoli tale integrale esplicitamente, e si verifichi che il suo valore è *indipendente* dalla scelta di E.

PARTE DUE Si consideri ora un generico potenziale $U(x)$, che ammette un punto x_0 di minimo locale isolato non degenere *ovvero* $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) > 0$. Si consideri un moto periodico di energia $E = U(x_0)+\epsilon^2$, e si calcoli il periodo delle oscillazioni $T(\epsilon)$ corrispondenti a tale energia in termini di un integrale definito, per ϵ abbastanza piccolo (affinché il moto considerato consista effettivamente in oscillazioni periodiche attorno a x_0). Si calcoli il periodo nel limite di *piccole oscillazioni*, i.e., si calcoli $\lim_{\epsilon\to 0} T(\epsilon)$. [*Suggerimento:* si sviluppi la funzione $E - U(x)$ che appare nell'espressione della funzione integranda in $T(\epsilon)$ in serie di Taylor attorno ad x_0 al second'ordine. Si osservi che, trascurando i termini di ordine $(x-x_0)^3$ o superiori, l'espressione da calcolare si riduce a quella della PARTE UNO. Si dimostri infine che, nel limite $\epsilon \to 0$, i termini di ordine superiore al secondo sono effettivamente trascurabili, i.e., producono una correzione $O(\epsilon)$ al calcolo di $T(\epsilon)$, quindi $\lim_{\epsilon\to 0} T(\epsilon)$ è uguale al valore che si ottiene rimpiazzando $E - U(x)$ nell'integrale con la sua approssimazione di Taylor del second'ordine attorno ad x_0.]

Si usi tale risultato per calcolare il periodo delle piccole oscillazioni per i seguenti esempi:

1. pendolo matematico attorno alla sua posizione di equilibrio stabile;
2. Lennard-Jones (vedi Esercizio 3) attorno al suo punto di equilibrio stabile;
3. doppia buca ($m\ddot{x} = ax - bx^3$, con $a, b > 0$) attorno ai suoi punti di equilibrio stabile.