

**4° tutorato - MA - 18/3/2015**

**Esercizio 1** Si consideri il moto di un punto materiale di massa  $m$  soggetto ad un potenziale centrale

$$V(\rho) = V_0 \left( \frac{1}{10} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^{10} - \frac{1}{6} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^6 \right) \quad (1)$$

dove  $V_0, r_0 > 0$ . Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo  $L$  del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:

1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di  $E$  e di  $L$ , si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.
3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.

**Esercizio 2: L'oscillatore Armonico Tridimensionale** Sia  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ . Si consideri il sistema meccanico costituito da un punto materiale di massa  $m$  e posizione  $\mathbf{r}$  soggetto ad una forza di richiamo elastica di costante  $k > 0$ :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}. \quad (2)$$

- 1 Si riconosca che il sistema è conservativo e si calcoli l'energia potenziale  $U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$ .

Sia  $L = |\mathbf{L}|$  il modulo del momento angolare. Supponendo  $L \neq 0$  si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, seguendo la strategia risolutiva generale dei moti in campo centrale. Più precisamente:

1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di  $E$  e di  $L$ , si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito. *Si risolva tale integrale, calcolando esplicitamente il periodo del moto radiale*
2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito. *Si risolva tale integrale, calcolando esplicitamente il secondo periodo del moto angolare.*
3. Si riconosca che il moto complessivo è periodico per ogni scelta dei dati iniziali. Si calcoli l'equazione della traiettoria. Si dimostri che la traiettoria è un'ellisse centrata nell'origine.

**Esercizio 3** Si consideri il moto di un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto ad un potenziale centrale

$$V(\rho) = \left( -\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{3\rho^3} \right) \quad (3)$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Al variare del modulo  $L$  del momento angolare, si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature. Più precisamente:

1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di  $E$  e di  $L$ , si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.

3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.
4. nei casi in cui il moto consiste in una caduta verso il centro, si discuta se il tempo di caduta è finito o infinito.

**Esercizio 4** Si consideri il moto di un punto materiale di massa  $m$  soggetto ad un potenziale centrale

$$V(\rho) = V_0 \left( -\frac{1}{4} \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^4 + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^2 \right) \quad (4)$$

con  $V_0, r_0 > 0$ . Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo  $L$  del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:

1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di  $E$  e di  $L$ , si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.
3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.
4. per i moti aperti, si discuta se la soluzione è globale o no.