Tutorato 8 - MA/FM210 - 12/5/2017

<u>ESERCIZIO 1.</u> Si calcolino i momenti principali di inerzia dei seguenti corpi rigidi rispetto al loro centro di massa:

1. Disco sottile omogeneo di massa M e raggio R [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{4}MR^2$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$].
2. Lamina quadrata sottile omogenea di lato ℓ e massa M [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M\ell^2$, $I_3 = \frac{1}{6}M\ell^2$].
3. Cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza h [Risposta: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2)$, $I_3 = \frac{1}{2}MR^2$].
4. Sfera omogenea di massa M e raggio R [Risposta: $I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}MR^2$].

SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 1 del tutorato 11 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut11sol.pdf`

<u>ESERCIZIO 2.</u> Si dimostri il seguente teorema (Huygens-Steiner): Sia dato un corpo rigido con centro di massa G e distribuzione di massa $\{\mathbf{q_i}, m_i\}$. Assegnate due rette parallele r_0 ed r_1 in direzione $\hat{\xi}$ e passanti la prima per G e la seconda per un punto P, vale la seguente identità:

$$I(r_1) = I(r_0) + Md^2$$

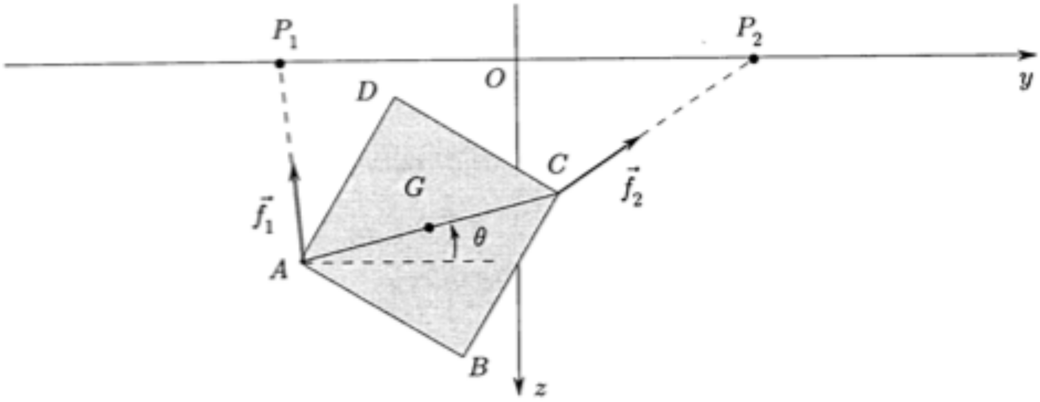
dove $I(r_i) = \sum_i m_i \mathrm{dist}^2(\mathbf{q_i}, r_i)$ è il momento di inerzia del corpo rigido rispetto alla retta r_i, e d è la distanza tra r_0 ed r_1.

SOLUZIONE. Si vedano le dispense del Prof. G. Gentile, Capitolo 10, paragrafo 42.26.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Un cilindro circolare retto omogeneo di massa M, raggio R e altezza h rotola senza strisciare su un piano orizzontale, in modo tale che il suo centro di massa G ha coordinate $(x(t), 0, R)$ ad ogni istante di tempo. Il centro di massa G è collegato da una molla di costante elastica k e centro $(0, 0, R)$. Si scriva la Lagrangiana del sistema (usando x come coordinata lagrangiana), l'equazione di Eulero-Lagrange e la si risolva.

SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 3 del tutorato 11 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut11sol.pdf`

ESERCIZIO 4. Una lamina piana quadrata $ABCD$, omogenea, pesante, di massa M e lato ℓ, è vincolata (senza attrito) a muoversi su un piano verticale. Sui vertici A e C della lamina agiscono rispettivamente due forze elastiche di costante elastica k e centri $P_1 = (0, -d, 0)$ e $P_2 = (0, d, 0)$. Si assumano come coordinate lagrangiane le coordinate y e z del baricentro e e l'angolo θ che la diagonale AC forma con l'asse y, come in figura. Si scrivano la Lagrangiana del sistema, le equazioni di Eulero-Lagrange e le si risolvano.

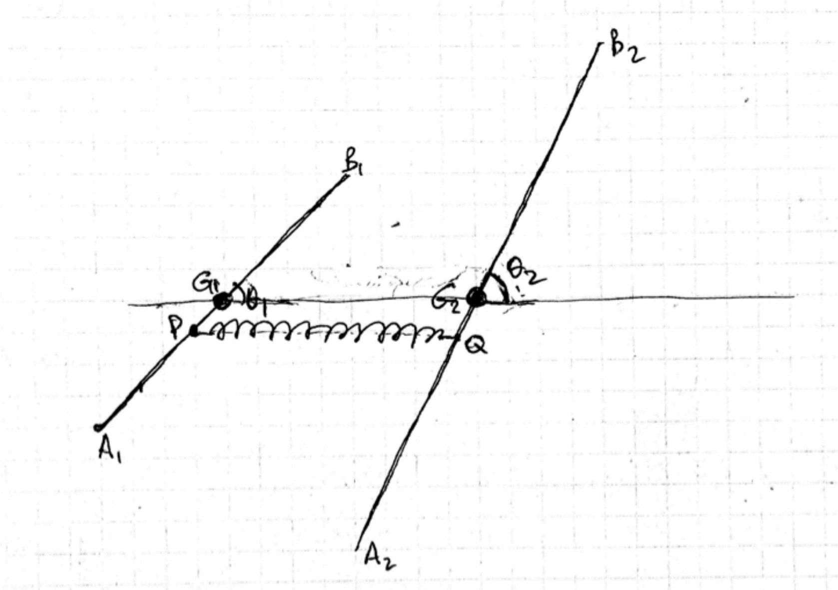


SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 5 del tutorato 11 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:

`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut11sol.pdf`

ESERCIZIO 5. In un piano orizzontale sono poste due aste sottili A_1B_1 e A_2B_2 di rispettive masse M_1 e M_2 (distribuzione di massa omogenea) e lunghezze L_1 e L_2. Le aste sono libere di ruotare attorno ai rispettivi baricentri G_1 e G_2, fissi nel piano, con $|\overrightarrow{G_1G_2}| = \ell > 0$. Si supponga che $\ell < \min\{L_1, L_2\}$.

Sia P un punto appartenente all'asta A_1B_1, giacente tra G_1 e A_1, Q un punto appartenente all'asta A_2B_2, giacente tra G_2 e A_2, tali che $|\overrightarrow{G_1P}| = |\overrightarrow{G_2Q}| = r > 0$. Tra i punti P e Q agisce una molla ideale, di costante elastica k.



- Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 indicati in figura [Si ricordi che i momenti di inerzia non banali di un'asta sottile omogenea di massa M e lunghezza L attorno al baricentro sono uguali a $I = ML^2/12$.]
- Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange e si determini l'espressione dell'energia conservata.
- Determinare i punti di equilibrio del sistema
- Discutere la stabilità degli equilibri al variare del parametro $\beta = \ell/(2r)$, nei casi in cui $\beta \neq 1$.
- Si consideri il limite in cui $\ell \to 0$: si osservi che il corrispondente sistema Lagrangiano è invariate sotto il gruppo di trasformazioni $(\theta_1, \theta_2) \to (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si determini la carica di Noether corrispondente.
- Nel caso $\ell = 0$, si passi a coordinate 'adattate alla simmetria': $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\Theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Si scriva la Lagrangiana nelle nuove coordinate e si riconosca che Θ è una variabile ciclica. Con il metodo di riduzione di Routh, ci si riduca a un sistema Lagrangiano a un grado di libertà, e lo si risolva per quadrature.

SOLUZIONE.

- Dato che i baricentri delle due aste sono fissi, l'energia cinetica del sistema T è uguale alla somma delle energie cinetiche di rotazione delle due aste attorno ai loro baricentri:

$$T = \frac{M_1 L_1^2}{24}\dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{M_2 L_2^2}{24}\dot{\theta}_2^{\,2}$$

Usando gli angoli θ_1 e θ_2 in figura, in un sistema di riferimento con origine coincidente con G_1 e asse x orientato come $\overrightarrow{G_1G_2}$, le coordinate di P e Q sono:

$$\begin{cases} x_P = -r\cos\theta_1 \\ y_P = -r\sin\theta_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_Q = \ell - r\cos\theta_2 \\ y_Q = -r\sin\theta_2 \end{cases}$$

Troviamo quindi che

$$|\overrightarrow{QP}|^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 = \ell^2 + 2r^2 - 2\ell r(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - 2r^2\cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Pertanto l'energia potenziale del sistema è

$$V(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}k\left[\ell^2 + 2r^2 - 2\ell r(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - 2r^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

e la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{M_1 L_1^2}{24}\dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{M_2 L_2^2}{24}\dot{\theta}_2^{\,2} - \frac{1}{2}k\left[\ell^2 + 2r^2 - 2\ell r(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - 2r^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

- Le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} = \frac{M_1 L_1^2}{12}\ddot{\theta}_1 = k\ell r\sin\theta_1 - kr^2\sin(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2} = \frac{M_1 L_1^2}{12}\ddot{\theta}_2 = -k\ell r\sin\theta_2 - kr^2\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2}$$

L'energia conservata del sistema è:

$$E = \frac{M_1 L_1^2}{24}\dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{M_2 L_2^2}{24}\dot{\theta}_2^{\,2} + \frac{1}{2}k\left[\ell^2 + 2r^2 - 2\ell r(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - 2r^2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

- I punti di equilibrio (θ_1^*, θ_2^*) del sistema sono tali che i moti 'banali' $(\theta_1(t), \theta_2(t)) \equiv (\theta_1^*, \theta_2^*)$ risolvono le equazioni di Eulero-Lagrange. Imponendo tale condizione troviamo:

$$\sin\theta_1^* = \frac{r}{\ell}\sin(\theta_1^* - \theta_2^*) = \sin\theta_2^*.$$

Dalla condizione $\sin\theta_1^* = \sin\theta_2^*$ abbiamo che o $\theta_1^* = \theta_2^*$, o $\theta_1^* = \pi - \theta_2^*$. Nel primo caso $\sin(\theta_1^* - \theta_2^*) = 0$, e quindi $\theta_1^* = \theta_2^* = 0$ o $\theta_1^* = \theta_2^* = \pi$. Nel secondo caso $\sin(\theta_1^* - \theta_2^*) = -\sin 2\theta_1^*$ e la condizione di equilibrio diventa quindi:

$$\sin\theta_1^* = -2\frac{r}{\ell}\sin\theta_1^*\cos\theta_1^*,$$

che ammette le seguenti soluzioni: $\theta_1^* = 0, \pi$, oppure, nel casp in cui $\beta \equiv \ell/(2r) < 1$, $\theta_1^* = \pm\arccos(-\beta)$. In conclusione, i punti di equilibrio sono (ricordando che $\arccos(-\beta) = \pi - \arccos\beta$):

$$(0,0), \quad (\pi,\pi), \quad (0,\pi), \quad (\pi,0), \quad (\arccos(-\beta), \arccos\beta), \quad (-\arccos(-\beta), -\arccos\beta),$$

dove ovviamente le ultime due soluzioni vanno prese in considerazione solo se $\beta < 1$.

- Per studiare la stabilità, calcoliamo la matrice Hessiana del potenziale $V(\theta_1, \theta_2)$:

$$\mathcal{H}(\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix} -k\ell r\cos\theta_1 + kr^2\cos(\theta_1-\theta_2) & -kr^2\cos(\theta_1-\theta_2) \\ -kr^2\cos(\theta_1-\theta_2) & k\ell r\cos\theta_2 + kr^2\cos(\theta_1-\theta_2) \end{pmatrix}$$

Calcolando $\mathcal{H}$ sui diversi punti di equilibrio troviamo:

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} -k\ell r & 0 \\ 0 & k\ell r \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} k\ell r & 0 \\ 0 & -k\ell r \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(0,\pi) = \begin{pmatrix} -k\ell r - kr^2 & kr^2 \\ kr^2 & -k\ell r - kr^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(\pi,0) = \begin{pmatrix} k\ell r - kr^2 & kr^2 \\ kr^2 & k\ell r - kr^2 \end{pmatrix}$$

e infine, se $\beta = \ell/(2r) < 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\arccos(-\beta), \arccos\beta) &= \mathcal{H}(-\arccos(-\beta), -\arccos\beta) \\ &= \begin{pmatrix} k\ell r\beta - kr^2\cos(2\arccos\beta) & kr^2\cos(2\arccos\beta) \\ kr^2\cos(2\arccos\beta) & k\ell r\beta - kr^2\cos(2\arccos\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} kr^2 & k(\frac{\ell^2}{2} - r^2) \\ k(\frac{\ell^2}{2} - r^2) & kr^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalle espressioni sopra, vediamo che $(0,0), (\pi,\pi)$ e $(0,\pi)$ sono sempre instabili.

Per quanto riguarda $(\pi, 0)$, noto che l'Hessiana in $(\pi, 0)$ ha determinante uguale a

$$2k^2\ell r^3(\beta - 1),$$

che è: (1) negativo per $\beta < 1$, nel qual caso $(\pi, 0)$ è instabile; (2) positivo per $\beta > 1$: in tal caso noto che l'elemento di matrice in alto a sinistra è uguale a $kr^2(2\beta - 1) > 1$, e quindi $(\pi, 0)$ è stabile.

Infine, se $\beta < 1$, noto che l'Hessiana in $\pm(\arccos(-\beta), \arccos\beta)$ ha determinante uguale a $k^2r^2\ell^2(1-\beta) > 0$; inoltre l'elemento di matrice in alto a sinistra è positivo, e quindi $\pm(\arccos(-\beta), \arccos\beta)$, quando esistono, sono stabili.

- Per $\ell \to 0$ la Lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L} = \frac{M_1 L_1^2}{24}\dot{\theta}_1^{\,2} + \frac{M_2 L_2^2}{24}\dot{\theta}_2^{\,2} - kr^2(1-\cos(\theta_1-\theta_2))$$

  che è invariante sotto il gruppo di trasformazioni $(\theta_1,\theta_2) \to (\theta_1+\alpha,\theta_2+\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Pertanto per il teorema di Noether la quantità $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{M_1 L_1^2}{12}\dot{\theta}_1 + \frac{M_2 L_2^2}{12}\dot{\theta}_2$ si conserva.

- Per $\ell = 0$ la Lagrangiana nelle nuove coordinate diventa:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\theta,\dot{\theta},\dot{\Theta}) = \frac{M_1 L_1^2}{24}(\dot{\Theta}+\frac{\dot{\theta}}{2})^2 + \frac{M_2 L_2^2}{24}(\dot{\Theta}-\frac{\dot{\theta}}{2})^2 - kr^2(1-\cos\theta)$$

  che non dipende dalla variabile Θ: pertanto la variabile Θ è una variabile ciclica, il momento coniugato

$$p_\Theta = \frac{M_1 L_1^2}{12}(\dot{\Theta}+\frac{\dot{\theta}}{2}) + \frac{M_2 L_2^2}{12}(\dot{\Theta}-\frac{\dot{\theta}}{2})$$

  è conservato: $p_\Theta(t) \equiv I$, che implica

$$\dot{\Theta} = \frac{12I}{M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2} - \frac{M_1 L_1^2 - M_2 L_2^2}{2(M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2)}\dot{\theta} \equiv a - b\dot{\theta}.$$

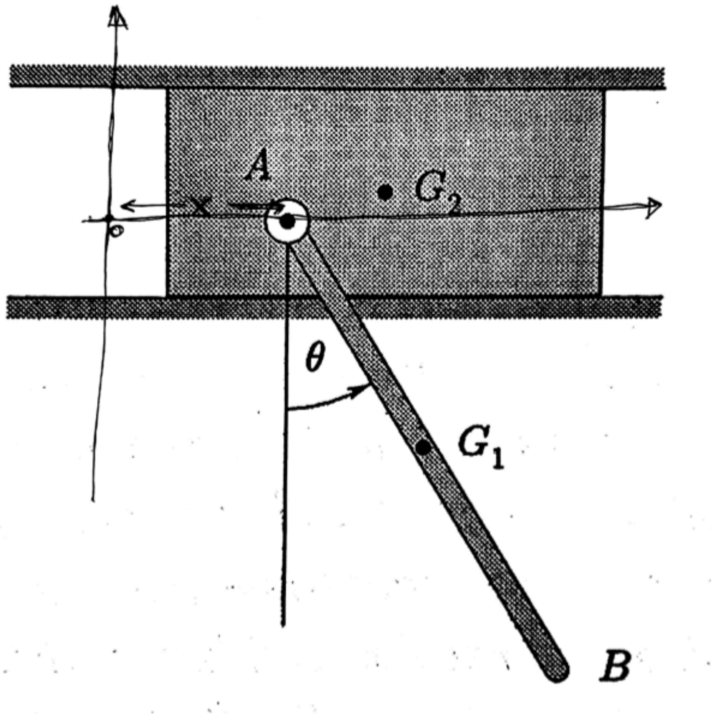
  Possiamo applicare il metodo di Routh per ridurre il sistema a un sistema Lagrangiano a un grado di libertà, con Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R(\theta,\dot{\theta}) = \tilde{\mathcal{L}}(\theta,\dot{\theta},\dot{\Theta}) - I\dot{\Theta}\Big|_{\dot{\Theta}=a-b\dot{\theta}},$$

  che può essere risolto per quadrature seguendo la strategia generale di soluzione dei sistemi meccanici conservativi unidimensionali (dettagli lasciati al lettore).

Esercizio 6. Un sistema piano articolato a vincoli perfetti è costituito da una sbarra rigida rettilinea AB omogenea pesante (di lunghezza 2ℓ e massa M) collegata in A con una cerniera ad una lamina (di massa $2M$) vincolata a muoversi di moto traslatorio rettilineo in direzione orizzontale. All'istante iniziale t_0, il sistema si trova in quiete (i.e., velocità nulla) con la sbarra in posizione orizzontale.

- Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane l'angolo θ indicato in figura e la posizione orizzontale x di A calcolata rispetto a O, come mostrato in figura.
- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema. Si riconosca che l'energia meccanica è conservata. Inoltre, si osservi che x è una variabile ciclica e si calcoli il momento conservato corrispondente.
- Si calcolino i valori delle due grandezze conservate corrispondenti al dato iniziale assegnato. Usando la due leggi di conservazione, determinare le velocità dei baricentri G_1 della sbarra e G_2 della lamina nel primo istante t_1 successivo a t_0 nel quale la sbarra è verticale. Usando le equazioni di Eulero-Lagrange, si calcolino le accelerazioni di G_1 e G_2 all'istante t_1.
- Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità



SOLUZIONE. Se (c_1, c_2) sono le due coordinate del vettore $\overrightarrow{AG_2}$, abbiamo

$$\begin{cases} x_{G_2} = x + c_1 \\ y_{G_2} = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{G_2} = \dot{x} \\ \dot{y}_{G_2} = 0 \end{cases}$$

Pertanto l'energia cinetica della lamina è $T_2 = M\dot{x}^2$. Inoltre

$$\begin{cases} x_{G_1} = x + \ell \sin\theta \\ y_{G_1} = -\ell\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{G_1} = \dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_{G_1} = \ell\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

Applicando il teorema di König otteniamo che l'energia cinetica dell'asta è (ricordando che il momento d'inerzia dell'asta attorno al baricentro è $I = \frac{1}{12}M(2\ell)^2 = \frac{1}{3}M\ell^2$):

$$T_1 = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) + \frac{1}{6}M\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{2}{3}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta.$$

La barretta è soggetta alla forza peso per cui: $V(\theta) = -Mg\ell\cos\theta$. La Lagrangiana è è quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2}M\dot{x}^2 + \frac{2}{3}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + Mg\ell\cos\theta.$$

- Abbiamo:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -M\ell\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta - Mg\ell\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{4}{3}M\ell^2\ddot{\theta} + M\ell\ddot{x}\cos\theta - M\ell\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = 3M\ddot{x} + M\ell\ddot{\theta}\cos\theta - M\ell\dot{\theta}^2\sin\theta$$

Pertanto le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \frac{4}{3}M\ell^2\ddot\theta + M\ell\ddot x\cos\theta - M\ell\dot x\dot\theta\sin\theta = -M\ell\dot\theta\dot x\sin\theta - Mg\ell\sin\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x} = 3M\ddot x + M\ell\ddot\theta\cos\theta - M\ell\dot\theta^2\sin\theta = 0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}$$

L'energia meccanica è:

$$E = \frac{3}{2}M\dot x^2 + \frac{3}{2}M\ell^2\dot\theta^2 + M\ell\dot\theta\dot x\cos\theta - Mg\ell\cos\theta.$$

La verifica esplicita della conservazione di E è lasciata al lettore. Notiamo inoltre che $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0$ pertanto la variabile x è una variabile ciclica e quindi il momento conservato corrispondente,

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x} = 3M\dot x + M\ell\dot\theta\cos\theta,$$

è una grandezza conservata: $p_x(t) \equiv I$.

- $\theta(t_0) = \frac{\pi}{2}$ e, poiché il sistema è in quiete, $\dot x(t_0) = 0$ e $\dot\theta(t_0) = 0$. Quindi $E = 0$ e $I = 0$. All'istante t_1 abbiamo $\theta(t_1) = 0$, e dunque, usando le leggi di conservazione di E e I, troviamo che, all'istante t_1:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\dot x^2 + \frac{2}{3}\ell^2\dot\theta^2 + \ell\dot\theta\dot x - g\ell = 0 \\ 3\dot x + \ell\dot\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ell}{6}\dot\theta^2 + \frac{2}{3}\ell\dot\theta^2 - \dot\theta^2\frac{\ell}{3} - g = 0 \\ \dot x = -\frac{\ell}{3}\dot\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot\theta(t_1) = -\sqrt{\frac{2g}{\ell}} \\ \dot x(t_1) = \frac{1}{3}\sqrt{2g\ell} \end{cases}$$

cosicché le velocità di G_1 e G_2 all'istante t_1 sono:

$$\begin{pmatrix} \dot x_{G_1}(t_1) \\ \dot y_{G_1}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot x(t_1) + \ell\dot\theta(t_1)\cos\theta(t_1) \\ \ell\dot\theta(t_1)\sin\theta(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sqrt{2g\ell} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot x_{G_2}(t_1) \\ \dot y_{G_2}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot x(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{2g\ell} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare le accelerazioni, rimpiazziamo i valori trovati per le velocità nelle equazioni di Eulero-Lagrange. Troviamo cosí che, al tempo t_1:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\ell\ddot\theta + \ddot x = 0 \\ 3\ddot x + \ell\ddot\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot\theta(t_1) = 0 \\ \ddot x(t_1) = 0 \end{cases}$$

Le accelerazioni di G_1 e G_2 al tempo t_1 sono quindi:

$$\begin{pmatrix} \ddot x_{G_1}(t_1) \\ \ddot y_{G_1}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot x(t_1) + \ell\ddot\theta(t_1)\cos\theta(t_1) - \ell\dot\theta^2(t_1)\sin\theta(t_1) \\ \ell\ddot\theta(t_1)\sin\theta(t_1) + \ell\dot\theta^2(t_1)\cos\theta(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2g \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \ddot x_{G_2}(t_1) \\ \ddot y_{G_2}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot x(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- I punti di equilibrio (x^*, θ^*) sono tali che i moti 'banali' $(x(t), \theta(t)) \equiv (x^*, \theta^*)$ risolvono le equazioni di Eulero-Lagrange. Troviamo $\sin\theta^* = 0$, e quindi $\theta^* = 0, \pi$. I punti di equilibrio sono quindi infiniti, della forma $(x^*, 0)$ o (x^*, π), con $x^* \in \mathbb{R}$. Notiamo che il potenziale $V(\theta) = -Mg\ell\cos\theta$ ha un minimo in $\theta = 0$ e un massimo in $\theta = \pi$: i punti di equilibrio della forma $(x^*, 0)$ sono quindi stabili, mentre quelli della forma (x^*, π) sono instabili.