

## Tutorato 7 - MA/FM210 - 5/5/2017

ESERCIZIO 1. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1^2 + q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2)^3.$$

- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, e determinare l'energia (generalizzata)  $E$ , conservata dalle equazioni del moto.
- Sfruttando la simmetria della Lagrangiana, dimostrare che esiste un integrale primo distinto da  $E$ . Detto  $I$  tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli  $I = c$ , con  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana ridotta.
- Si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale associato a tale Lagrangiana ridotta.

### SOLUZIONE.

- Le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema sono:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = 2q_1 - 6q_1(q_1^2 + q_2^2)^2 \\ \ddot{q}_2 = 2q_2 - 6q_2(q_1^2 + q_2^2)^2 \end{cases}$$

L'energia generalizzata  $E$ , costante lungo le soluzioni alle equazioni di Eulero-Lagrange, è

$$E = \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (q_1^2 + q_2^2) + (q_1^2 + q_2^2)^3 \equiv \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + U(\mathbf{q}),$$

dove il potenziale  $U$  è

$$U(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}^2 + \mathbf{q}^6.$$

- La Lagrangiana è invariante per rotazioni, i.e., è invariante sotto trasformazioni delle coordinate  $\mathbf{q} \rightarrow g_\alpha(\mathbf{q})$  della forma:

$$g_\alpha(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

dove  $\alpha \in \mathbb{R}$ , e delle corrispondenti trasformazioni delle velocità

$$\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}.$$

La corrispondente grandezza conservata è, per il teorema di Noether,

$$I = I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

dove

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \left. \frac{dg_\alpha(\mathbf{q})}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix},$$

e  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}$ , cosicché

$$I = q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1.$$

È conveniente passare a coordinate ‘adattate alle simmetrie del sistema’: visto che il potenziale  $U(\mathbf{q})$  dipende solo dal modulo di  $\mathbf{q}$ , passo a coordinate polari:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

e noto che il potenziale, nelle nuove coordinate, dipende dalla sola coordinata  $r$ :

$$U(\mathbf{q}(r, \theta)) = -r^2 + r^6 \equiv V(r).$$

In altre parole,  $\theta$  è una coordinata ciclica per la Lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}$  ottenuta trasformando la Lagrangiana originale nelle nuove coordinate, che ha la forma:

$$\tilde{\mathcal{L}}(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + r^2 - r^6.$$

In tali coordinate, la conservazione di  $I$  prende la forma:

$$I = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta} \equiv c.$$

Assumendo  $c \neq 0$ , posso invertire tale relazione nella forma  $\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$ . Usando il metodo di riduzione di Routh, ottengo la Lagrangiana ridotta le cui equazioni di Eulero-Lagrange descrivono il moto del sistema sulla superficie  $I(r, \dot{\theta}) = c$ :

$$\tilde{\mathcal{L}}_R(r, \dot{r}) = \tilde{\mathcal{L}}(r, \dot{r}, \dot{\theta}) - \dot{\theta} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} \Big|_{\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}} = \tilde{\mathcal{L}}(r, \dot{r}, \frac{c}{r^2}) - \frac{c^2}{r^2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{c^2}{2r^2} + r^2 - r^6.$$

- L'equazione del moto associata a  $\tilde{\mathcal{L}}_R(r, \dot{r})$  è

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} + 2r - 6r^5,$$

le cui soluzioni conservano l'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{c^2}{2r^2} - r^2 + r^6 \equiv \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r).$$

Il grafico qualitativo di  $V_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} - r^2 + r^6$  è mostrato in Fig.1.

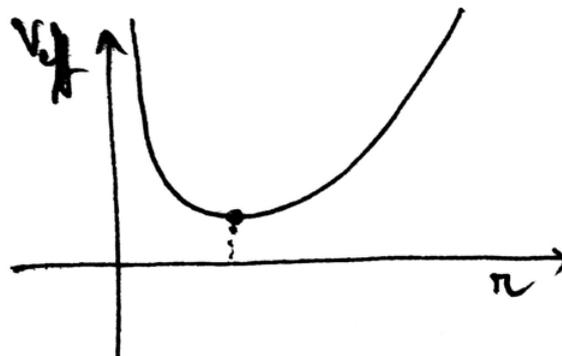


Figura 1

Le curve di livello corrispondenti, al variare dell'energia  $E$ , sono mostrate in Fig.2.

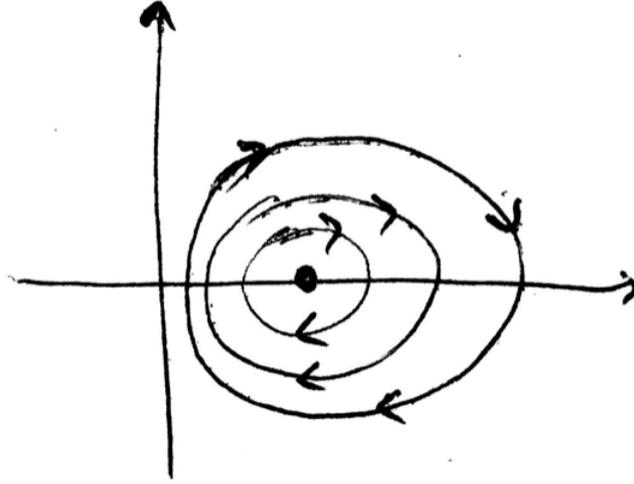


Figura 2

I moti corrispondenti a tali curve di livello sono tutti chiusi e periodici.

**ESERCIZIO 2.** Si consideri un punto materiale di massa  $m$  in tre dimensioni, soggetto ad un campo di forze di energia potenziale  $U(x, y, z)$  soddisfacente il seguente requisito: il potenziale è invariante rispetto al gruppo di trasformazioni  $g_\alpha$  tale che:

$$g_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \alpha \end{pmatrix},$$

dove  $\ell > 0$  è una costante (con le dimensioni fisiche di lunghezza).

- Si trovi l'integrale primo corrispondente alla simmetria dell'energia potenziale e si determini un sistema di coordinate adattato  $(r, \theta, z)$ .
- Usando la simmetria del sistema si riduca di uno il numero di gradi di libertà, introducendo un'opportuna Lagrangiana ridotta. Determinare gli equilibri di tale Lagrangiana ridotta.
- Si studi la stabilità degli equilibri nel caso particolare:

$$V(r, \theta, z) = \frac{V_0}{r^2(\cos^2(\theta - z/\ell) - \sin^2(\theta - z/\ell))}.$$

**SOLUZIONE.**

- Innanzitutto si noti che la trasformazione sulle velocità indotta dalla trasformazione  $\mathbf{x} \rightarrow g_\alpha(\mathbf{x})$  è

$$\dot{\mathbf{x}} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}},$$

che lascia invariata l'energia cinetica  $\frac{m}{2}\dot{x}^2$  del sistema. Quindi il gruppo di trasformazioni  $g_\alpha$  lascia invariata la Lagrangiana meccanica  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(\mathbf{x})$  e, per il teorema di Noether, il sistema ammette la seguente grandezza conservata:

$$I = I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}},$$

dove

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left. \frac{dg_\alpha(\mathbf{x})}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ \ell \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}}.$$

Di conseguenza:

$$I = I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 + \ell\dot{x}_3).$$

Per effettuare il metodo di riduzione di Routh è conveniente passare (almeno temporaneamente) a coordinate cilindriche, in termini delle quali

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

e

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cosicché

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2.$$

Quindi, la Lagrangiana del sistema in coordinate cilindriche è

$$\tilde{\mathcal{L}}(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r, \theta, z),$$

dove  $V(r, \theta, z) \equiv U(\mathbf{x}(r, \theta, z))$  è invariante sotto la seguente trasformazione, che lascia invariata  $r$ :  $\theta \rightarrow \theta + \alpha$ ,  $z \rightarrow z + \ell\alpha$ : tale è l'espressione della trasformazione  $g_\alpha(\mathbf{x})$  riespressa in coordinate cilindriche. In altre parole:

$$V(r, \theta, z) = V(r, \theta + \alpha, z + \ell\alpha),$$

che vuol dire che  $V$  è una funzione di sole due variabili: di  $r$  e della combinazione  $\theta - z/\ell$ :

$$V(r, \theta, z) = v(r, \theta - z/\ell),$$

per un'opportuna funzione  $v$ . Chiamiamo allora  $\phi$  la combinazione  $\theta - z/\ell$ , cosicché  $\phi = \theta - z/\ell \Leftrightarrow z = \ell(\theta - \phi)$  e cambiamo coordinate, da  $(r, \theta, z)$  a  $(r, \theta, \phi)$ . Nelle nuove coordinate la Lagrangiana prende la forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) &= \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \ell^2(\dot{\theta} - \dot{\phi})^2] - v(r, \phi) \\ &= \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + (r^2 + \ell^2)\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\phi}^2 - 2\ell^2\dot{\theta}\dot{\phi}] - v(r, \phi). \end{aligned}$$

In termini di queste variabili la variabile  $\theta$  è ciclica, i.e.,  $\bar{\mathcal{L}}$  è indipendente dalla variabile  $\theta$  (d'ora in poi scriveremo quindi  $\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ ). Quindi il momento coniugato

$$I = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = m(r^2 + \ell^2)\dot{\theta} - m\ell^2\dot{\phi}$$

è una grandezza conservata (che altro non è che la 'carica di Noether'  $I$ , già introdotta sopra, espressa nelle nuove variabili).

- La legge di conservazione per  $I$  può essere usata per eliminare  $\dot{\theta}$  in funzione delle altre variabili:

$$\dot{\theta} = \frac{I + m\ell^2\dot{\phi}}{m(r^2 + \ell^2)}.$$

A questo punto, sulla superficie a  $I$  costante, possiamo ridurre il sistema di un grado di libertà usando il metodo di Routh. La Lagrangiana ridotta (parametrizzata dal valore  $I$  della grandezza conservata) è:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}_R(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) &= \bar{\mathcal{L}}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) - I\dot{\theta} \Big|_{\dot{\theta} = \frac{I+m\ell^2\dot{\phi}}{m(r^2+\ell^2)}} \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m(r^2 + \ell^2)}{2} \frac{(I + m\ell^2\dot{\phi})^2}{m^2(r^2 + \ell^2)^2} + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 - m\ell^2\dot{\phi} \frac{I + m\ell^2\dot{\phi}}{m(r^2 + \ell^2)} - \frac{I(I + m\ell^2\dot{\phi})}{m(r^2 + \ell^2)} - v(r, \phi) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot{\phi}^2 - \frac{(I + m\ell^2\dot{\phi})^2}{2m(r^2 + \ell^2)} - v(r, \phi) \\ &\equiv \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{a(r)}{2}\dot{\phi}^2 - b(r)\dot{\phi} - W(r, \phi), \end{aligned} \quad (1)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto il *potenziale efficace*  $W(r, \phi)$ :

$$W(r, \phi) = \frac{I^2}{2m(r^2 + \ell^2)} + v(r, \phi)$$

e le funzioni

$$a(r) = \frac{m\ell^2 r^2}{r^2 + \ell^2}, \quad b(r) = \frac{I\ell^2}{r^2 + \ell^2}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti sono:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = \frac{(I+m\ell^2\dot{\phi})^2}{m(r^2+\ell^2)^2}r - \frac{\partial v(r,\phi)}{\partial r} \\ \frac{d}{dt} \left[ m\ell^2\dot{\phi} - \frac{\ell^2(I+m\ell^2\dot{\phi})}{r^2+\ell^2} \right] = -\frac{\partial v(r,\phi)}{\partial \phi} \end{cases} \iff \begin{cases} m\ddot{r} = \frac{1}{2}a'(r)\dot{\phi}^2 - b'(r)\dot{\phi} - \frac{\partial W(r,\phi)}{\partial r} \\ \frac{d}{dt} [a(r)\dot{\phi} - b(r)] = -\frac{\partial W(r,\phi)}{\partial \phi} \end{cases}$$

Si noti che le soluzioni alle equazioni di Eulero-Lagrange conservano la seguente energia generalizzata:

$$E = \dot{r} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_R}{\partial \dot{r}} + \dot{\phi} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}_R}{\partial \dot{\phi}} - \bar{\mathcal{L}}_R = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{a(r)}{2}\dot{\phi}^2 + W(r, \phi).$$

I punti di equilibrio sono le soluzioni di:

$$\begin{cases} \frac{\partial v(r,\phi)}{\partial r} = \frac{I^2}{m(r^2+\ell^2)^2}r \\ \frac{\partial v(r,\phi)}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial W(r,\phi)}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial W(r,\phi)}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$$

- Nel caso particolare assegnato, il potenziale, espresso in funzione di  $r$  e  $\phi$ , prende la forma:

$$v(r, \phi) = \frac{V_0}{r^2(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)} = \frac{V_0}{r^2 \cos(2\phi)},$$

che è periodico di periodo  $\pi$ . Assumiamo, ad es., che  $V_0 > 0$ . Una discussione analoga alla seguente si può ripetere nel caso  $V_0 < 0$ .

Il potenziale efficace ha la forma:

$$W(r, \phi) = \frac{I^2}{2m(r^2 + \ell^2)} + \frac{V_0}{r^2 \cos(2\phi)}$$

e l'equazione per i punti di equilibrio è:

$$\begin{cases} -\frac{I^2 r}{m(r^2 + \ell^2)^2} - \frac{2V_0}{r^3 \cos(2\phi)} = 0 \\ \frac{2V_0 \sin(2\phi)}{r^2 \cos^2(2\phi)} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione vediamo che  $\phi = 0$  o  $\phi = \frac{\pi}{2}$  (modulo  $\pi$ ). Sostituendo nella prima troviamo

$$\frac{I^2 r}{m(r^2 + \ell^2)^2} = \pm \frac{2V_0}{r^3}$$

dove il segno  $+$  corrisponde al caso  $\phi = \pi/2$ , mentre il segno  $-$  corrisponde al caso  $\phi = 0$ . Nel caso che stiamo considerando, in cui  $V_0 > 0$ , tale ammette soluzione solo se il segno al membro di destra è  $+$ , ovvero  $\phi = \pi/2 \equiv \phi_{eq}$ . In tal caso, sull'equilibrio,  $r$  è una radice di

$$(\beta - 1)r^4 - 2\ell^2 r^2 - \ell^4 = 0, \quad \text{dove} \quad \beta = \frac{I^2}{2mV_0}.$$

Ora, se  $\beta \leq 1$ , tale equazione non ammette soluzioni fisicamente accettabili, mentre, se  $\beta > 1$ , ammette una soluzione fisicamente accettabile:

$$r = r_{eq} := \frac{\ell}{\sqrt{\beta - 1}} \sqrt{1 + \sqrt{\beta}}. \quad (2)$$

In conclusione, il sistema ammette un punto di equilibrio se e solo se  $\beta > 1$ , nel qual caso il punto di equilibrio è

$$(r_{eq}, \phi_{eq}) = \left( \ell \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\beta}}{\beta - 1}}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Per studiare la stabilità degli equilibri, calcoliamo l'Hessiano sul punto di equilibrio. Si trova:

$$\mathcal{H}(r_{eq}, \phi_{eq}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W(r_{eq}, \phi_{eq})}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 W(r_{eq}, \phi_{eq})}{\partial r \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 W(r_{eq}, \phi_{eq})}{\partial r \partial \phi} & \frac{\partial^2 W(r_{eq}, \phi_{eq})}{\partial \phi^2} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{r_{eq}^4} \begin{pmatrix} -8\frac{\sqrt{\beta}-1}{\sqrt{\beta}} & 0 \\ 0 & -4r_{eq}^2 \end{pmatrix}.$$

Visto che entrambi gli autovalori dell'Hessiano sul punto di equilibrio sono negativi,  $(r_{eq}, \phi_{eq})$  corrisponde a un massimo proprio non degenero del potenziale efficace, e quindi il punto di equilibrio è *instabile*.

**ESERCIZIO 3.** Un'autobus si muove lungo il percorso rettilineo da  $A$  a  $B$  con accelerazione costante  $a > 0$ , partendo al tempo  $t = 0$  da fermo dal punto  $A$ . Scelto un sistema di riferimento fisso  $\kappa$  con asse  $y$  lungo la direttrice  $AB$ , asse  $z$  lungo la verticale (così che  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ) e asse  $x$  scelto conseguentemente, si scelga un sistema di riferimento mobile  $K$  solidale all'autobus e si calcolino:

1. le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità da  $\kappa$  a  $K$ .

Durante il tragitto da  $A$  a  $B$  un passeggero all'interno dell'autobus lancia una pallina di massa  $m$  verso l'alto (nel suo sistema di riferimento).

2. Si scrivano le equazioni del moto della pallina nel sistema di riferimento  $K$ .
3. Si risolvano tali equazioni in corrispondenza del dato iniziale assegnato.
4. Si dica a che distanza dal punto di lancio ricade la pallina.

**SOLUZIONE.** Si veda la soluzione all'esercizio 1 del tutorato 10 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:

[http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public\\_html/didattica/FM210\\_2013/tut10sol.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut10sol.pdf)

**ESERCIZIO 4.** Al luna park, Luigi decide di salire sul galeone dei pirati, una giostra che oscilla nel modo seguente: il galeone è sospeso a un braccio meccanico di lunghezza  $R$ , contenuto nel piano verticale  $xz$ , che vincola il galeone a muoversi sulla circonferenza verticale di raggio  $R$  e centro nel fulcro del braccio. Se  $\theta$  è l'angolo formato dal braccio con la verticale, la legge oraria del moto angolare è  $\theta(t) = \sin(\kappa t)$ , con  $\kappa > 0$ . Dopo aver scelto un sistema di riferimento fisso  $\kappa$  e uno in moto  $K$  solidale a Luigi mentre si trova sulla giostra (durante la corsa Luigi rimane legato e fermo su un sedile del galeone, che possiamo supporre coincidente con l'origine del sistema mobile), si scrivano:

1. le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità da  $\kappa$  a  $K$ ;
2. la forza totale, per componenti, a cui è soggetto Luigi (si assuma che Luigi sia soggetto, oltre che alle forze fittizie dovute al moto di  $K$  rispetto a  $\kappa$ , anche alla forza peso). Qual è l'intensità di tale forza al variare del tempo?

**SOLUZIONE.** Si veda la soluzione all'esercizio 3 del tutorato 10 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:

[http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public\\_html/didattica/FM210\\_2013/tut10sol.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut10sol.pdf)