5^o tutorato - FM210/MA - 21/4/2017

Esercizio 1 Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema bidimensionale di Lagrangiana
$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 - 2q_1q_2$$
e trovarne esplicitamente la soluzione.

SOLUZIONE Le equazioni di Eulero-Lagrange sono:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2,$$
con:
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -\dot{q}_2 - 2q_2, \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = q_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_2, \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \dot{q}_1 - 2q_1, \\
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = -q_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = -\dot{q}_1.
\end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:
$$\begin{cases} \dot{q}_2 = -\dot{q}_2 - 2q_2 \\ -\dot{q}_1 = \dot{q}_1 - 2q_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{q}_1 = \quad q_1 \\ \dot{q}_2 = -\dot{q}_2 \end{cases}$$
le cui soluzioni sono:
$$\begin{cases} q_1(t) = q_1(0)e^t \\ q_2(t) = q_2(0)e^{-t}. \end{cases}$$

Esercizio 2 Si consideri un pendolo costituito da una molla di lunghezza di riposo ℓ sospesa a un punto di sospensione O, al cui estremo libero è appesa una massa m (vedi Fig.1). Si scriva la Lagrangiana del sistema usando le coordinate x e θ, dove $\ell + x$ è la lunghezza della molla e θ l'angolo formato con la verticale verso il basso, come in figura. Si determinino le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti.

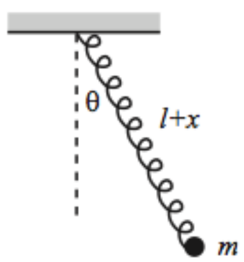
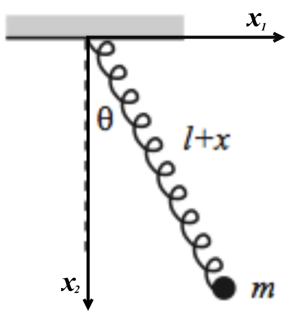


Figure 1

SOLUZIONE Consideriamo il seguente sistema di riferimento:



Ricordiamo che la Lagrangiana è definita come: $\mathcal{L} = T - U$ dove T è l'energia cinetica e U è il potenziale. Cominciamo col riscriverci le coordinate $x_{1,m}$ e $x_{2,m}$ del punto di massa m in termini delle coordinate x e θ:

$$\begin{cases} x_{1,m} = (\ell + x)\sin\theta \\ x_{2,m} = (\ell + x)\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{1,m} = \dot{x}\sin\theta + (\ell + x)\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{x}_{2,m} = \dot{x}\cos\theta - (\ell + x)\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{1,m}^2 + \dot{x}_{2,m}^2) = \frac{1}{2}m[(\dot{x}\sin\theta + (\ell + x)\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\dot{x}\cos\theta - (\ell + x)\dot{\theta}\sin\theta)^2] = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (\ell + x)^2\dot{\theta}^2]$$

Notiamo che il corpo di massa m è soggetto sia alla forza peso che alla forza elastica:

$$\Rightarrow U = U_{el} + U_{grav} = \frac{1}{2}kx^2 - mg(\ell + x)\cos\theta$$

Pertanto la Lagrangiana sarà:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (\ell + x)^2\dot{\theta}^2] - \frac{1}{2}kx^2 + mg(\ell + x)\cos\theta$$

Da cui:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg(\ell + x)\sin\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m(\ell + x)^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 2m(\ell + x)\dot{x}\dot{\theta} + m(\ell + x)^2\ddot{\theta}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta \\ 2(\ell + x)\dot{x}\dot{\theta} + (\ell + x)^2\ddot{\theta} = -g(\ell + x)\sin\theta \end{cases}$$

Esercizio 3 Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema tridimensionale di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - eV(\mathbf{x}) + e\dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

dove $V(\mathbf{x})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ sono funzioni assegnate di $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ (V è una funzione scalare, a valori in $\mathbb{R}$, mentre $\mathbf{A}$ è una funzione vettoriale, a valori in $\mathbb{R}^3$). Si riconosca che le equazioni del moto coincidono con le equazioni del moto di una particella di carica e in un campo elettrico $\mathbf{E} = -\nabla V$ e campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{A}$.

Soluzione Notiamo che, in componenti,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) &= \mathcal{L}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})\\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - eV(x,y,z) + e(\dot{x}A_1(x,y,z)+\dot{y}A_2(x,y,z)+\dot{z}A_3(x,y,z)).\end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -e\frac{\partial V}{\partial x} + e(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial x})$$

e

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} + eA_1(x,y,z) \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\ddot{x} + e(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_1}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_1}{\partial z}).$$

Analogamente:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = -e\frac{\partial V}{\partial y} + e(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial y}+\dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial y}),$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\dot{y} + eA_2(x,y,z) \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\ddot{y} + e(\dot{x}\frac{\partial A_2}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_2}{\partial z}),$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = -e\frac{\partial V}{\partial z} + e(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial z}+\dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial z}+\dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial z}),$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = m\dot{z} + eA_3(x,y,z) \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = m\ddot{z} + e(\dot{x}\frac{\partial A_3}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_3}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial z}).$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + e(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_1}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_1}{\partial z}) = -e\frac{\partial V}{\partial x} + e(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial x}+\dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial x})\\ m\ddot{y} + e(\dot{x}\frac{\partial A_2}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_2}{\partial z}) = -e\frac{\partial V}{\partial y} + e(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial y}+\dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial y})\\ m\ddot{z} + e(\dot{x}\frac{\partial A_3}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial A_3}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial z} = -e\frac{\partial V}{\partial z} + e(\dot{x}\frac{\partial A_1}{\partial z}+\dot{y}\frac{\partial A_2}{\partial z}+\dot{z}\frac{\partial A_3}{\partial z}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -e\frac{\partial V}{\partial x} + e\big[\dot{y}(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}) + \dot{z}(\frac{\partial A_3}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial z})\big]\\ m\ddot{y} = -e\frac{\partial V}{\partial y} + e\big[\dot{x}(\frac{\partial A_1}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial x}) + \dot{z}(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z})\big]\\ m\ddot{z} = -e\frac{\partial V}{\partial z} + e\big[\dot{x}(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}) + \dot{y}(\frac{\partial A_2}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial y})\big] \end{cases}$$

Ricordando che

$$\mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\\ \frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\\ \frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{E} = -\nabla V = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial y}\\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

vediamo che il sistema di equazioni sopra si può riscrivere equivalentemente nella forma:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eE_1 + e(\dot{y}B_3 - \dot{z}B_2) \\ m\ddot{y} = eE_2 + e(-\dot{x}B_3 + \dot{z}B_1) \\ m\ddot{z} = eE_3 + e(\dot{x}B_2 - \dot{y}B_1) \end{cases}$$

o, equivalentemente, in notazione vettoriale:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + e\dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B},$$

che sono le equazioni del moto di una particella di carica e in un campo elettrico $\mathbf{E}$ e campo magnetico $\mathbf{B}$.

Esercizio 4 Stabilire che forma assumono le equazioni di Newton $m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, in coordinate sferiche. A tale scopo, usare la trasformazione di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \equiv \mathbf{f}(r,\theta,\phi),$$

e determinare la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(r,\theta,\phi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\phi})$ corrispondente alla Lagrangiana meccanica $\mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x})$ nelle nuove coordinate. Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(r,\theta,\phi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\phi})$. Si riconosca che, se il potenziale $V(r,\theta,\phi) = U(\mathbf{f}(r,\theta,\phi))$ dipende dalle sole variabili r e θ, allora il sistema ammette una grandezza conservata, e si determini tale grandezza. Analogamente, se $V(r,\theta,\phi)$ dipende dalla sola variabile r, allora il sistema ammette due grandezze conservate; si determinino tali grandezze.

Soluzione Si noti che la trasformazione di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{f}(r,\theta,\phi)$ induce la seguente trasformazione sulla velocità:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\cos\phi\dot{\theta} - r\sin\theta\sin\phi\dot{\phi} \\ \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\cos\theta\sin\phi\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\phi\dot{\phi} \\ \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

che implica

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2.$$

Pertanto la Lagrangiana, nelle nuove coordinate, diventa:

$$\tilde{\mathcal{L}}(r,\theta,\phi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\phi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - V(r,\theta,\phi)$$

cosicché:

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial r} = mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - \frac{\partial V}{\partial r}$$

e

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{r}} = m\ddot{r}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta},$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi},$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\phi}} = m(2r\dot{r}\sin^2\theta\dot{\phi} + 2r^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + r^2\sin^2\theta\ddot{\phi}).$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ m\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 - \dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ 2mr\dot{r}\sin^2\theta\dot{\phi} + 2mr^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + mr^2\sin^2\theta\ddot{\phi} = -\dfrac{\partial V}{\partial \phi} \end{cases}$$

Ora, se il potenziale V dipende solo dalle variabili r e ϕ, allora $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$, cosicché l'ultima delle equazioni di Eulero-Lagrange si può riscrivere nella forma: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\phi}} = 0$, ovvero

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \equiv p_\phi,$$

dove p_ϕ è una *costante del moto.*

Inoltre, se V è indipendente anche da θ, allora $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$, cosicché la seconda equazione di Eulero-Lagrange si può riscrivere nella forma : $\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = 0$, ovvero

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \equiv p_\theta,$$

dove p_θ è una seconda *costante del moto.*

Esercizio 5 (Legge di Snell)

Un raggio di luce si propaga in una regione bidimensionale di coordinate $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ con velocità dipendente dal punto: $v(\mathbf{x}) = c/n(x)$, dove $n(x) \geq 1$ è chiamato indice di rifrazione locale, e stiamo supponendo che tale indice sia una funzione della sola coordinata orizzontale x.

Secondo il *principio di Fermat*, il raggio di luce si propaga dal punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ al punto $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, con $x_1 < x_2$, in modo tale da minimizzare il tempo T di percorrenza tra i due punti. Si verifichi che, se $y = f(x)$ è l'equazione cartesiana della traiettoria seguita dal raggio di luce, allora

$$T = T[f] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\frac{n(x)}{c}dx.$$

Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente alla condizione di minimo tempo di percorrenza. Si riconosca che tale equazione implica che la seguente combinazione è conservata:

$$n(x)\sin\theta(x) = cost.,$$

dove $\theta(x)$ è l'angolo formato dalla tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $(x, f(x))$ con l'asse orizzontale.

Soluzione Sia T il tempo in cui il raggio va dal punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ al punto $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Abbiamo

$$T = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} dt(x)$$

dove $dt(x)$ è il tempo impiegato dal raggio di luce per percorrere un tratto di curva infinitesimo, corrispondente a una variazione delle ascisse uguale a dx, a partire dal punto $(x, f(x))$. Nell'istante in cui la particella si trova in $(x, f(x))$, si ha che $v(x) = \frac{c}{n(x)} = \frac{d\ell}{dx}$, dove $d\ell$ è il valore assoluto dello spostamento infinitesimo del raggio di luce lungo la curva, i.e., $d\ell = dx|(1, f'(x))|$ e quindi:

$$v(x) = \frac{c}{n(x)} = \frac{dx}{dt}\sqrt{1 + |f'(x)|^2}$$

Da questa relazione si trova che $dt(x) = dx\sqrt{1 + |f'(x)|^2}\frac{n(x)}{c}$. Sostituendo nella formula per T troviamo:

$$T = T[f] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\frac{n(x)}{c}dx.$$

Il funzionale $T[f]$ può essere interpretato come l'azione di Lagrangiana

$$\mathcal{L}(f, f', x) = \sqrt{1 + |f'|^2}\,\frac{n(x)}{c}$$

calcolata lungo la traiettoria $f(x)$ tra $x = x_1$ e $x = x_2$. Si noti che la variabile x gioca qui il ruolo di parametro della curva (l'analogo del ruolo giocato dal tempo t nell'usuale contesto meccanico). Si noti anche che la Lagrangiana è indipendente da f, i.e.,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 0,$$

mentre

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'} = \frac{n(x)}{c}\frac{f'}{\sqrt{1 + |f'|^2}}.$$

L'equazione di Eulero-Lagrange è quindi:

$$\frac{d}{dx}\Big[\frac{n(x)}{c}\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + |f'(x)|^2}}\Big] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n(x)}{c}\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + |f'(x)|^2}} = cost.$$

Si noti infine che, chiamando $\theta(x)$ l'angolo formato dalla tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$ con l'asse orizzontale, si ha che $f'(x) = \tan\theta(x)$ e $\frac{f'(x)}{\sqrt{1+|f'(x)|^2}} = \sin\theta(x)$, cosicché la legge di conservazione si può riscrivere nella forma:

$$n(x)\sin\theta(x) = cost.$$

che è nota come legge di Snell.