Tutorato extra - FM210/MA - 29/05/2017

Esercizio 1 Un cilindro omogeneo di massa M e raggio a rotola senza strisciare sulla superficie interna di un cilindro cavo di raggio interno R (vedi figura), il cui asse è in posizione orizzontale. Il cilindro di raggio a si muove sotto l'effetto della forza di gravità. Si scriva la Lagrangiana del sistema nelle variabili $(\phi, \dot{\phi})$ (con ϕ scelto come in figura) e si risolva il moto per quadrature. Si identifichi il punto di equilibrio stabile e il periodo delle piccole oscillazioni.

Soluzione `http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2015/soluzioni_12.pdf`

Esercizio 2 Si consideri una piramide retta a base quadrata di lato di base ℓ e altezza h. La piramide ha massa M e densità volumetrica costante.

- Si determini la posizione del centro di massa.
- Si calcolino gli assi e i momenti principali d'inerzia rispetto al centro di massa.

Si supponga ora di lanciare in aria la piramide con l'asse della piramide inizialmente verticale, i.e., in modo tale che all'istante $t = 0$ l'asse d'inerzia η_3 coincida con l'asse verticale fisso e_3. Si supponga che la velocità $v_G(0)$ assegnata inizialmente al centro di massa abbia componente lungo e_3 positiva, e che la velocità angolare $\omega(0)$ attorno al centro di massa assegnata inizialmente al corpo giaccia sul piano orizzontale, i.e., ω_3. Si determini il moto risultante, distinguendo il moto traslatorio del centro di massa e il moto rotatorio attorno al centro di massa.

Soluzione `http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2015/soluzioni_12.pdf`

Esercizio 3 Un punto materiale di massa m si muove sulla superficie di un cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$ con z asse verticale. Il punto è collegato all'origine da una molla ideale di costante k e lunghezza riposo nulla.

- Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
- Determinare gli integrali primi.
- Determinare la lagrangiana di Routh L_R.
- Discutere qualitativamente il moto generato da L_R trovando i punti di equilibrio e discutendone la stabilità nel caso in cui il potenziale gravitazionale sia trascurabile.
- A quali orbite dello spazio tridimensionale corrispondono i moti periodici della lagrangiana ridotta?

Soluzione `http://www.mat.uniroma3.it/users/betta/mas/esercizi_07_08/mas_17_2_09.pdf`

Esercizio 4 Si consideri il sistema meccanico costituito da due dischi sottili, rigidi, omogenei di raggio r e di masse m_1 ed m_2 e centri C_1 e C_2 posti nel piano verticale Π e vincolati a rotolare senza strisciare rispettivamente all'interno e all'esterno di una guida circolare di raggio $R = 2r$ con centro fisso in un punto O. Tra i due centri C_1 e C_2 è posta una molla ideale di costante di richimamo k e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane gli angoli ϑ_1 e ϑ_2 che O_{C_1} ed O_{C_2} formano con l'asse y ed il caso $m_1 = 3m_2$.

- Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
- Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilit'a al variare dei parametri in gioco.
- Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.
- Se il piano Π è posto in rotazione attorno all'asse verticale passante per il punto O con velocità angolare costante ω, scrivere la lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π.

Soluzione `http://www.mat.uniroma3.it/users/betta/mas/esercizi/disco1.pdf`

Esercizio 5 Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{q^2}{4}\dot{q}^2 e^{q^2}$$

1. Scrivere l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton;
2. Determinare la trasformazione canonica tale che $Q = e^{q^2}$;
3. Usare la trasformazione canonica trovata al punto 2. per risolvere le equazioni del moto trovate al punto 1. con dati iniziali $q(0) = p(0) = 1$.

`http://www.mat.uniroma3.it/users/betta/mas/esercizi_07_08/mas_17_2_09.pdf`

Esercizio 6 Si considerino le equazioni differenziali:

$$\dot{p} = -p^2(q+1) - \frac{1}{q+1}$$

$$\dot{q} = -p(q+1)^2$$

con dati iniziali $p(0) = 0$, $q(0) = 1$.

- Verificare che il sistema è hamiltoniano e ricavarne la Hamiltoniana e la lagrangiana.
- Ricavare la trasformazione canonica tale che $Q = \log(q+1)$.
- Usare la trasformazione canonica precedente per integrare le equazioni differenziali.

Soluzione `http://www.mat.uniroma3.it/users/betta/mas/risultati/mas_3_2_15.pdf`