

FM210 / MA

PRIMA PROVA DI ESONERO [10-4-2017]

1. **(14 punti)**. Un punto materiale di massa m si muove in una dimensione sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale

$$U(x) = A \frac{x}{x^2 + \ell^2},$$

dove A e ℓ sono parametri positivi.

- Si scriva l'equazione del moto
 - Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione
 - Si disegni il grafico del potenziale. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità. Per i punti di equilibrio stabile, si scriva l'equazione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio e si calcoli la frequenza di oscillazione corrispondente.
 - Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi (x, \dot{x}) e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare della grandezza conservata identificata sopra. Nel caso di moti periodici non banali, se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.
 - Nel caso di moti aperti, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o no (e se, quindi, la soluzione è globale nel tempo o no).
2. **(16 punti)**. Il moto di una particella di massa m in \mathbb{R}^3 è descritto dalla seguente equazione del moto associata a una forza centrale:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{r} - V_0 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2},$$

dove k e V_0 sono parametri positivi.

- Si calcoli il potenziale centrale corrispondente.
- Supponendo il momento angolare diverso da zero, si descriva il sistema in coordinate polari sul piano ortogonale a \mathbf{L} : si scriva l'equazione del moto per la variabile radiale e si determini il potenziale efficace corrispondente.
- Si disegni il grafico del potenziale efficace e delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare dell'energia meccanica E e del modulo L del momento angolare.
- Si determinino i punti di equilibrio del moto radiale e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare di E e di L .
- Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (eventualmente in termini di un integrale definito).
- Nel caso di moti aperti, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o no (e se, quindi, la soluzione è globale nel tempo o no).