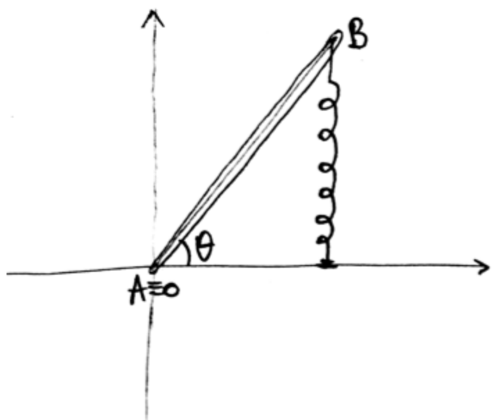
FM210 / MA - Seconda prova di esonero (31-5-2017)

<u>Esercizio 1.</u> Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza ℓ e massa M è vincolata a muoversi su un piano verticale Π, con estremo A fissato nel punto O. L'asta è soggetta alla forza peso. Inoltre, sull'estremo libero B agisce una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, che connette B con l'asse orizzontale passante per O, in modo tale da lavorare sempre in posizione verticale.



1. Usando l'angolo θ mostrato in figura come coordinata generalizzata, si scriva la Lagrangiana del sistema e l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente. [Si ricordi che il momento d'inerzia I di un'asta omogenea di massa M e lunghezza ℓ, attorno a un asse perpendicolare all'asta e passante per il baricentro, è uguale a $I = \frac{1}{12}M\ell^2$.]

2. Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.

3. Supponendo $k > \frac{Mg}{2\ell}$, si identifichino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.

4. Nel caso $k > \frac{Mg}{2\ell}$, si risolva l'equazione del moto per quadrature e si discuta qualitativamente la natura dei moti (in particolare, si disegnino le curve di livello sul piano delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$ per i diversi valori assunti dall'integrale primo identificato sopra).

Esercizio 2. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2} e^{qp^2}$$

1. Si scrivano le equazioni di Hamilton.

2. Si determini la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $S(q,P) = 2\sqrt{2q \log P}$ e se ne calcoli l'inversa. Quali sono i domini di definizione delle trasformazioni canoniche diretta e inversa cosí determinate?

3. Si verifichi esplicitamente che la trasformazione canonica identificata al punto precedente conserva le parentesi di Poisson fondamentali.

4. Si usi la trasformazione canonica identificata sopra per integrare le equazioni del moto con dato iniziale $(q(0), p(0)) = (1, 1)$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.