

## EFFETTO DEL RESTO DI TAYLOR NELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

### 1. PICCOLE OSCILLAZIONI

Si consideri un sistema meccanico conservativo di energia potenziale  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$M\ddot{\mathbf{R}}(t) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}(\mathbf{R}(t)), \quad (1.1)$$

dove  $M$  è la matrice (diagonale) delle masse, di elementi diagonali  $M_{ii} > 0$ . Sia  $\mathbf{R}_{eq}$  un punto di equilibrio stabile corrispondente a un minimo stretto non degenere dell'energia potenziale, i.e., il gradiente di  $U$  in  $\mathbf{R}_{eq}$  è nullo,  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}(\mathbf{R}_{eq}) = \mathbf{0}$ , e l'Hessiano  $\mathcal{H}_0$  di elementi

$$(\mathcal{H}_0)_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial R_i \partial R_j}(\mathbf{R}_{eq})$$

è strettamente definito positivo. Se  $\lambda_{min} > 0$  il minimo degli autovalori di  $\mathcal{H}_0$ , scriveremo

$$\mathcal{H}_0 \geq \lambda_{min} \mathbf{1} > 0$$

nel senso delle forme quadratiche, i.e.,  $\mathbf{u} \cdot \mathcal{H}_0 \mathbf{u} \geq \lambda_{min} |\mathbf{u}|^2 > 0, \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ .

Sviluppando (1.1) in serie di Taylor attorno al punto di equilibrio, troviamo:

$$M\ddot{R}_i(t) = -\sum_{j=1}^n (\mathcal{H}_0)_{ij} (R_j(t) - R_{eq,j}) + C_i(\mathbf{R}(t), \mathbf{R}_{eq}), \quad i = 1, \dots, n,$$

o, equivalentemente, in forma vettoriale,

$$M\ddot{\mathbf{R}}(t) = -\mathcal{H}_0(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_{eq}) + \mathbf{C}(\mathbf{R}(t), \mathbf{R}_{eq}), \quad (1.2)$$

dove il vettore  $\mathbf{C}$  (di coordinate  $C_i$ ) è il resto di second'ordine in serie di Taylor, che può essere espresso, ad esempio, in termini della formula integrale:

$$C_i(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{eq}) = \int_0^1 (1-s) \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 U}{\partial R_i \partial R_j \partial R_k}(\mathbf{R}_{eq} + s(\mathbf{R} - \mathbf{R}_{eq})) (R_j - R_{eq,j})(R_k - R_{eq,k}) ds.$$

Per  $|\mathbf{R} - \mathbf{R}_{eq}|$  abbastanza piccolo, il termine di resto è stimato come

$$|\mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{eq})| \leq K |\mathbf{R} - \mathbf{R}_{eq}|^2$$

per un'opportuna costante  $K > 0$ . In particolare,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$  t.c.

$$|\mathbf{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{eq})| \leq K |\mathbf{R} - \mathbf{R}_{eq}|^2 \leq \varepsilon \lambda_{min} |\mathbf{R} - \mathbf{R}_{eq}|.$$

Per il teorema di Dirichlet,  $\mathbf{R}_{eq}$  è un punto di equilibrio stabile, in quanto minimo stretto del potenziale: quindi, dati iniziali  $(\mathbf{R}(0), \dot{\mathbf{R}}(0))$  abbastanza vicini a  $(\mathbf{R}_{eq}, \mathbf{0})$  generano moti  $(\mathbf{R}(t), \dot{\mathbf{R}}(t))$  che rimangono vicini a piacere a

$(\mathbf{R}_{eq}, \mathbf{0}), \forall t \geq 0$ . Quindi, scegliendo opportunamente i dati iniziali, possiamo far sí che il termine di resto nel membro di destra della (1.2) soddisfi

$$|\mathbf{C}(\mathbf{R}(t), \mathbf{R}_{eq})| \leq \varepsilon \lambda_{min} |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_{eq}| \leq \varepsilon |\mathcal{H}_0 (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_{eq})| \quad (1.3)$$

per ogni  $t \geq 0$ . Si noti che la seconda disuguaglianza in (1.3) segue dalla condizione che  $\mathcal{H}_0 \geq \lambda_{min} \mathbf{1}$  (*Dimostrazione: per esercizio*). In conclusione, scegliendo dati iniziali sufficientemente vicini al punto di equilibrio, il termine di resto nel membro di destra della (1.2) è più piccolo di  $\varepsilon \times$  (termine lineare), per ogni tempo positivo; in altre parole, l'equazione *linearizzata*

$$M\ddot{\mathbf{R}}(t) = -\mathcal{H}_0 (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_{eq}) \quad (1.4)$$

è vicina all'equazione originale, per ogni tempo positivo. Tale equazione, quindi, per dati iniziali molto vicini al punto di equilibrio, rappresenta un'ottima approssimazione del problema originale. L'equazione linearizzata (1.4) è nota come equazione delle *piccole oscillazioni*: la soluzione generale può essere ricavata analiticamente, come discusso a lezione, ed ha la seguente forma:

$$\mathbf{R}_{lin}(t) = \mathbf{R}_{eq} + \sum_{i=1}^n a_i \cos(\omega_i t + \phi_i) M^{-1/2} \mathbf{v}_i,$$

dove  $\omega_i^2$  sono gli autovalori della matrice  $M^{-1/2} \mathcal{H}_0 M^{-1/2}$  e  $\mathbf{v}_i$  i suoi autovettori. Inoltre,  $a_i$  e  $\phi_i$  sono costanti di integrazione, da fissarsi in termini dei dati iniziali. Le frequenze  $\omega_i$  sono note come *frequenze normali*, o *proprie*, o *caratteristiche*, mentre le autodirezioni  $M^{-1/2} \mathbf{v}_i$  sono chiamati *modi normali* delle piccole oscillazioni.

## 2. EFFETTO DEI TERMINI DI ERRORE

Nonostante il termine di resto  $\mathbf{C}$  nelle equazioni del moto (1.3) sia più piccolo di  $\varepsilon \times$  (termine lineare) per ogni tempo positivo, *la soluzione dell'equazione linearizzata non rimane vicina alla soluzione del problema completo per tutti i tempi*: l'effetto del termine di errore  $\mathbf{C}$  si accumula nel tempo e fa sí che le soluzioni dei due problemi (completo e linearizzato) corrispondenti allo stesso dato iniziale tendano ad allontanarsi l'una dall'altra per tempi sufficientemente lunghi. In altre parole, sapendo che le due equazioni differiscono per un termine piccolo, possiamo concludere solo che le soluzioni dei due problemi, corrispondenti allo stesso dato iniziale, rimangono vicine per un lungo intervallo di tempo (inversamente proporzionale alla distanza del dato iniziale dal punto di equilibrio, come vedremo più avanti), ma *non per sempre*. Cerchiamo di quantificare tale affermazione.

Consideriamo per semplicità il caso unidimensionale,  $n = 1$ , nel qual caso l'equazione del moto prende la forma

$$m\ddot{x} = -U'(x).$$

Se  $x_{eq}$  è un punto di minimo proprio non degenere di  $U$ , i.e.,  $U'(x_{eq}) = 0$  e  $U''(x_{eq}) > 0$ , sviluppando in serie di Taylor l'equazione del moto attorno a  $x_{eq}$  troviamo:

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2(x - x_{eq}) + C(x, x_{eq}), \quad (2.1)$$

dove  $\omega_0 = \sqrt{U''(x_{eq})/m}$  e  $C(x, x_{eq})$  è il resto di Taylor del second'ordine, stimato come

$$|C(x, x_{eq})| \leq K(x - x_{eq})^2, \quad \forall |x - x_{eq}| \leq \delta_0, \quad (2.2)$$

dove  $\delta_0$  è un parametro sufficientemente piccolo. L'equazione linearizzata è l'equazione dell'oscillatore armonico,

$$\ddot{x}_{lin} = -\omega_0^2(x_{lin} - x_{eq}), \quad (2.3)$$

la cui soluzione generale è

$$x_{lin}(t) = x_{eq} + a \cos(\omega_0 t + \phi),$$

dove le costanti  $a > 0$  e  $\phi$  dipendono dai dati iniziali: in particolare, sono legati a essi dalle condizioni

$$x_{lin}(0) - x_{eq} = a \cos \phi, \quad \dot{x}_{lin}(0) = -a\omega_0 \sin \phi. \quad (2.4)$$

Si noti che  $\dot{x}_{lin}(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$ , cosicché

$$\sqrt{(x_{lin}(t) - x_{eq})^2 + \omega_0^{-2} \dot{x}_{lin}^2(t)} = a \quad (2.5)$$

è una costante del moto. L'ampiezza  $a$  misura l'ampiezza del dato iniziale, e nel seguito sarà supposta 'sufficientemente piccola'. In particolare, supporremo che  $a < \delta_0$ , dove  $\delta_0$  è la costante che appare in (2.2).

Si consideri ora la soluzione  $x(t)$  del problema completo, di equazione (2.1), con dato iniziale identico a quello considerato per il problema linearizzato, i.e.,

$$x(0) = a \cos \phi, \quad \dot{x}(0) = -a\omega_0 \sin \phi.$$

Vogliamo misurare la distanza di tale soluzione da quella corrispondente del problema linearizzato: a tale scopo consideriamo la seguente funzione, che gioca il ruolo di quadrato della distanza tra le due soluzioni:

$$g(t) := |x(t) - x_{lin}(t)|^2 + \omega_0^{-2} |\dot{x}(t) - \dot{x}_{lin}(t)|^2. \quad (2.6)$$

Si noti che  $g(0) = 0$ , poiché i dati iniziali sono stati supposti identici. Cerchiamo ora di derivare una disuguaglianza differenziale per  $g(t)$ , che useremo per ottenere una stima su quanto  $g(t)$  può crescere al crescere del tempo. Derivando (2.6) rispetto al tempo troviamo:

$$\dot{g}(t) = 2(x(t) - x_{lin}(t))(\dot{x}(t) - \dot{x}_{lin}(t)) + 2\omega_0^{-2}(\dot{x}(t) - \dot{x}_{lin}(t))(\ddot{x}(t) - \ddot{x}_{lin}(t)). \quad (2.7)$$

Usando le equazioni del moto (2.1) e (2.3), troviamo che

$$\ddot{x}(t) - \ddot{x}_{lin}(t) = -\omega_0^2(x(t) - x_{lin}(t)) + \frac{1}{m}C(x, x_{eq}),$$

che, sostituita nella (2.7), ci dà:

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= 2(x(t) - x_{lin}(t))(\dot{x}(t) - \dot{x}_{lin}(t)) - 2\omega_0^{-2}\omega_0^2(\dot{x}(t) - \dot{x}_{lin}(t))(x(t) - x_{lin}(t)) \\ &\quad + \frac{2}{m\omega_0^2}(\dot{x}(t) - \dot{x}_{lin}(t))C(x, x_{eq}), \end{aligned}$$

ovvero, semplificando i due termini nella prima riga:

$$\dot{g}(t) = \frac{2}{m\omega_0^2}(\dot{x}(t) - \dot{x}_{lin}(t))C(x(t), x_{eq}). \quad (2.8)$$

Si noti che, per la disuguaglianza triangolare,  $|x(t) - x_{eq}| \leq |x_{lin}(t) - x_{eq}| + |x(t) - x_{lin}(t)|$ , dove: (1)  $|x_{lin}(t) - x_{eq}| \leq a$ , per la (2.5); (2)  $|x(t) - x_{lin}(t)| \leq \sqrt{g(t)}$ , per la (2.6). Quindi

$$|x(t) - x_{eq}| \leq a + \sqrt{g(t)},$$

cosicché

$$g(t) \leq a^2 \implies |x(t) - x_{eq}| \leq 2a.$$

Se, inoltre,  $a \leq \delta_0/2$ , usando la (2.2) troviamo che sotto le stesse ipotesi  $|C(x, x_{eq})| \leq 4Ka^2$ . Rimpiazzando nella (2.8) troviamo:

$$g(t) \leq a^2 \implies \dot{g}(t) \leq \frac{8a^2K}{m\omega_0^2} |\dot{x}(t) - \dot{x}_{lin}(t)|. \quad (2.9)$$

Si noti inoltre che, per la (2.6),  $|\dot{x}(t) - \dot{x}_{lin}(t)| \leq \omega_0 \sqrt{g(t)}$ , cosicché

$$g(t) \leq a^2 \implies \dot{g}(t) \leq \frac{8a^2K}{m\omega_0} \sqrt{g(t)}. \quad (2.10)$$

Ora vorremmo dividere la disuguaglianza trovata per  $\sqrt{g(t)}$  e integrare membro a membro nel tempo, tra 0 e  $t$ . Dato che  $g(t) \geq 0$ , per evitare problemi dovuti alla divisione per zero, nel caso in cui  $g(T) = 0$  per qualche tempo  $T$ , procediamo come segue: notiamo che la (2.10) implica che

$$\dot{g}(t) \leq \frac{8a^2K}{m\omega_0} \sqrt{g(t) + \varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (2.11)$$

intanto che  $g(t) \leq a^2$ . A questo punto, dividendo per  $\sqrt{g(t) + \varepsilon}$  e integrando nel tempo membro a membro troviamo:

$$\int_0^t \frac{\dot{g}(s)}{\sqrt{g(s) + \varepsilon}} ds \leq \frac{8a^2K}{m\omega_0} t,$$

dove il membro di sinistra, ricordando che  $g(0) = 0$ , è uguale a

$$2 \int_0^t \frac{d}{ds} \sqrt{g(s) + \varepsilon} ds = 2[\sqrt{g(t) + \varepsilon} - \sqrt{\varepsilon}].$$

Quindi

$$\sqrt{g(t) + \varepsilon} \leq \sqrt{\varepsilon} + \frac{4a^2K}{m\omega_0} t$$

che, essendo valida per ogni  $\varepsilon > 0$ , implica, per continuità nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , che

$$\sqrt{g(t)} \leq \frac{4a^2K}{m\omega_0} t.$$

In conclusione, abbiamo dimostrato che

$$g(t) \leq a^2 \frac{16a^2K^2}{m^2\omega_0^2} t^2, \quad (2.12)$$

che è valida intanto che  $g(t) \leq a^2$  e quindi, in particolare, per  $0 \leq t \leq T_{max} := \frac{m\omega_0}{4aK}$ . Si noti infatti che il membro di destra della (2.12) è una funzione crescente di  $t$ , che assume il valore  $a$  per  $t = T_{max}$ . Quindi, ricordando la definizione di  $g(t)$ ,

$$\sqrt{|x(t) - x_{lin}(t)| + \omega_0^{-2} |\dot{x}(t) - \dot{x}_{lin}(t)|} \leq a \frac{t}{T_{max}}, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T_{max}$$

e, in particolare, fissato un qualsiasi parametro piccolo  $\varepsilon > 0$ , la distanza tra le soluzioni del problema completo e quella del linearizzato corrispondenti agli stessi dati iniziali, rimangono vicine entro  $\varepsilon a$ , fintanto che  $0 \leq t \leq \varepsilon T_{max} = \frac{\varepsilon m \omega_0}{4K} \frac{1}{a}$ , che è grande a piacere, scegliendo  $a$  sufficientemente piccolo. Per tempi più grandi di  $T_{max}$ , invece, non sappiamo dire se le due soluzioni continuano a rimanere vicine.