FM210 / MA - Seconda prova pre-esonero (26-5-2017)

<u>Esercizio 1.</u> Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza R e massa M è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_3, orientato verticalmente verso l'alto, e B sull'elica circolare $\boldsymbol{\gamma}$ di equazioni parametriche

$$\boldsymbol{\gamma}(u) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ hu \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R},$$

dove h è una costante positiva.

Oltre alla forza peso, l'asta è soggetta ad una forza

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2az_G(z_G^2 - h^2) \end{pmatrix},$$

dove z_G è la coordinata verticale del baricentro dell'asta e $a > 0$ un parametro positivo.

1. Usando u come coordinata generalizzata, si scriva la Lagrangiana del sistema e l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente. [Si ricordi che il momento d'inerzia I di un'asta omogenea di massa M e lunghezza R, attorno a un asse perpendicolare all'asta e passante per il baricentro, è uguale a $I = \frac{1}{12}MR^2$.]
2. Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
3. Si identifichino, al variare del parametro $a > 0$, i punti di equilibrio del sistema, e se ne discuta la stabilità.
4. Si risolva l'equazione del moto per quadrature e si discuta qualitativamente la natura dei moti, al variare del parametro $a > 0$ (in particolare, si disegnino, al variare di $a > 0$, le curve di livello sul piano delle fasi $(u, \dot{u})$ per i diversi valori assunti dall'integrale primo identificato sopra). Nel caso di moti periodici non banali, se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

<u>Esercizio 2.</u> Per $q > 0$ e $q \neq 1$, si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2 \log^2 q}$$

1. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange.
2. Si calcoli l'Hamiltoniana corrispondente e si scrivano le equazioni di Hamilton.
3. Si determini il valore dei parametri a e b per cui la seguente trasformazione è canonica:
$$\begin{cases} Q = a \log p + \log q \\ P = -p^b q \log q \end{cases}$$
Per tali valori dei parametri, si costruisca la trasformazione inversa, e si determinino i domini su cui le trasformazioni diretta e inversa sono definite.
4. Si usi la trasformazione canonica determinata al punto precedente per integrare le equazioni di Hamilton con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (e, 1/e)$. Più precisamente: si mappi l'Hamiltoniana assegnata in una nuova Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P)$, si scrivano e risolvano le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili, e poi si torni alle variabili (q,p) usando la trasformazione canonica inversa. La soluzione trovata è globale nel tempo o no? Se no, qual è l'intervallo di definizione della soluzione?
5. Si verifichi che la soluzione trovata risolve le equazioni di Eulero-Lagrange originali.