FM210 / MA - Primo scritto (16-6-2017)

<u>Esercizio 1.</u> Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie di un paraboloide di equazione $z + (x^2 + y^2)/\ell = 0$, con $\ell > 0$. Il vincolo può supporsi ideale. Oltre alla forza peso (e alle forze di reazione vincolare), il punto è soggetto a una forza di richiamo elastica verso l'origine di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Si supponga $k > 2mg/\ell$.

1. Si descriva il vincolo in coordinate cilindriche (z, ρ, θ), e si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili ρ e θ.

2. Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica. Si identifichino le grandezze conservate del sistema.

3. Si risolvano le equazioni del moto per le variabili ρ e θ per quadrature. Dopo aver disegnato le curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, si discuta la natura qualitativa del moto radiale e del moto complessivo.

4. Si identifichino dati iniziali corrispondenti a un moto complessivo periodico, e si calcoli il periodo corrispondente.

<u>Esercizio 2.</u> Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\frac{\log^2 p}{q^2}$$

per $p > 0, q > 0$.

1. Si scrivano le equazioni di Hamilton.

2. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice di seconda specie $S(q,P)$ che mappi l'Hamiltoniana originale in $\tilde{H}(Q,P) = P^2/2$.

3. Dopo aver determinato una soluzione $S(q,P)$ all'equazione di Hamilton-Jacobi, si determini la trasformazione canonica corrispondente.

4. Usando la trasformazione canonica determinata sopra, si risolvano le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1$, $p(0) = e$. In particolare, si riconosca che $q(t) = f^{-1}(t)$ con f^{-1} l'inversa funzionale di $f(q) = (q-1)e^q$ per $q > 0$. Si verifichi che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.