**FM210 / MA - Quinto scritto (19-2-2018)**

ESERCIZIO 1. Il moto di una particella di massa $m$ in $\mathbb{R}^3$ è descritto dall'equazione:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} + \frac{A}{|\mathbf{r}|^2}\mathbf{r} - \frac{B}{|\mathbf{r}|^4}\mathbf{r},$$

dove $k$, $A$ e $B$ sono parametri positivi e $B < \frac{A^2}{4k}$.

1. Si stabilisca se la forza è conservativa e, in caso, si calcoli il potenziale corrispondente.
2. Si identifichino le grandezze conservate del moto.
3. Si disegni il grafico del potenziale efficace per il moto radiale, al variare delle grandezze conservate.
4. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, con $\rho = |\mathbf{r}|$, al variare delle grandezze conservate, e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.
5. Si esibiscano valori dei dati iniziali e delle grandezze conservate per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (se possibile, esplicitamente, altrimenti in termini di un integrale definito).

**SOLUZIONE.**

1. La forza assegnata è centrale, e quindi conservativa. Si noti che

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (-k\rho + \frac{A}{\rho} - \frac{B}{\rho^3})\hat{\mathbf{r}},$$

dove $\rho = |\mathbf{r}|$ e $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$. Il potenziale centrale $V(\rho)$ soddisfa quindi la condizione

$$V'(\rho) = k\rho - \frac{A}{\rho} + \frac{B}{\rho^3}$$

cosicché

$$V(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2 - A\log\rho - \frac{B}{2\rho^2}.$$

2. Come ogni equazione di Newton in campo centrale, il problema ammette come grandezze conservate l'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(|\mathbf{r}|),$$

e le tre componenti del momento angolare

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}.$$

3. Come ogni problema in campo centrale, il moto si svolge sul piano ortogonale a $\mathbf{L}$, e su tale piano conviene passare a coordinate polari $(\rho, \theta)$. L'equazione effettiva per il moto radiale è

$$m\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho),$$

dove

$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} = \frac{1}{2}k\rho^2 - A\log\rho + \frac{L^2/m - B}{2\rho^2}.$$

Poniamo $\beta := \frac{L^2}{m} - B$, cosicché

$$V_{eff}(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2 - A\log\rho + \frac{\beta}{2\rho^2}.$$

Per disegnare il grafico qualitativo del potenziale efficace, al variare di $L \geq 0$ (o, equivalentemente, di $\beta \geq -B$), notiamo che, nel caso in cui $\beta \geq 0$, $V_{eff}(\rho)$ tende a $+\infty$, sia per $\rho \to 0^+$ che per $\rho \to \infty$; invece, nel caso in cui $\beta < 0$, $V_{eff}(\rho)$ tende a $-\infty$ per $\rho \to 0^+$, mentre tende a $+\infty$ per $\rho \to \infty$. Inoltre, la derivata prima ha la seguente forma:

$$V'_{eff}(\rho) = k\rho - \frac{A}{\rho} - \frac{\beta}{\rho^3} = \frac{k}{\rho^3}(\rho^4 - \frac{A}{k}\rho^2 - \frac{\beta}{k}),$$

che si annulla in $\rho = \rho_\pm$, con

$$\rho_\pm = \left[\frac{A}{2k} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4k^2} + \frac{\beta}{k}}\right]^{1/2},$$

a patto che le due radici siano positive. Il caso in cui $\rho_\pm$ sono positive e distinte si verifica per $-\frac{A^2}{4k} < \beta < 0$, che corrisponde a $L < \sqrt{mB}$ (si noti che la condizione $-\frac{A^2}{4k} < \beta = \frac{L^2}{m} - B$ è sempre verificata, poiché $B - \frac{A^2}{4k}$ è negativo, per ipotesi). In tal caso $V_{eff}$ è crescente per $0 < \rho < \rho_-$ e per $\rho > \rho_+$, mentre è decrescente per $\rho_- < \rho < \rho_+$. Nel caso in cui $\beta \geq 0$ (ovvero, per $L \geq \sqrt{mB}$), solo la radice $\rho_+$ è positiva: in tal caso, $V_{eff}$ è decrescente per $0 < \rho < \rho_+$ e crescente per $\rho > \rho_+$. Il grafico qualitativo del potenziale efficace, al variare di $L \geq 0$, è mostrato in Fig.1.

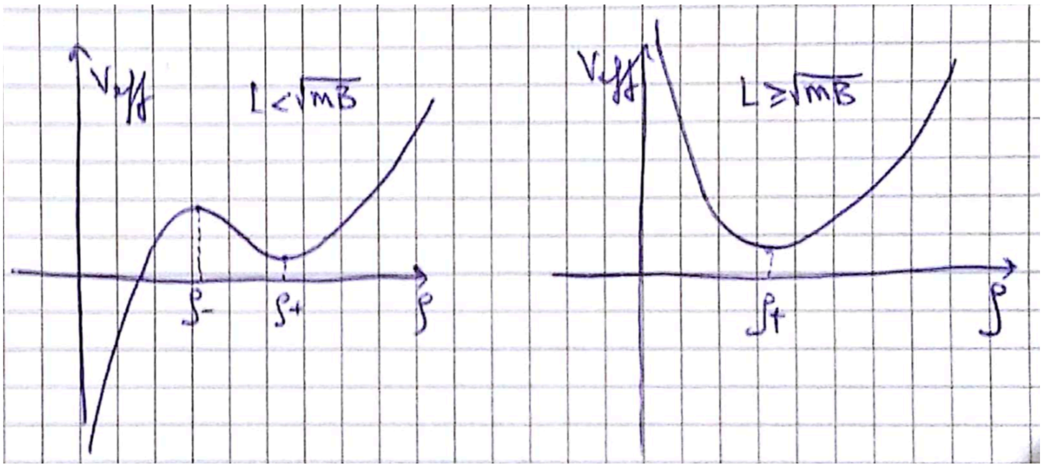


Figura 1: Grafico del potenziale efficace.

4. L'equazione delle curve di livello è data dalla conservazione dell'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))},$$

il cui grafico nel piano delle fasi ridotto, al variare di $E$ e $L$, è mostrato in Fig.2.

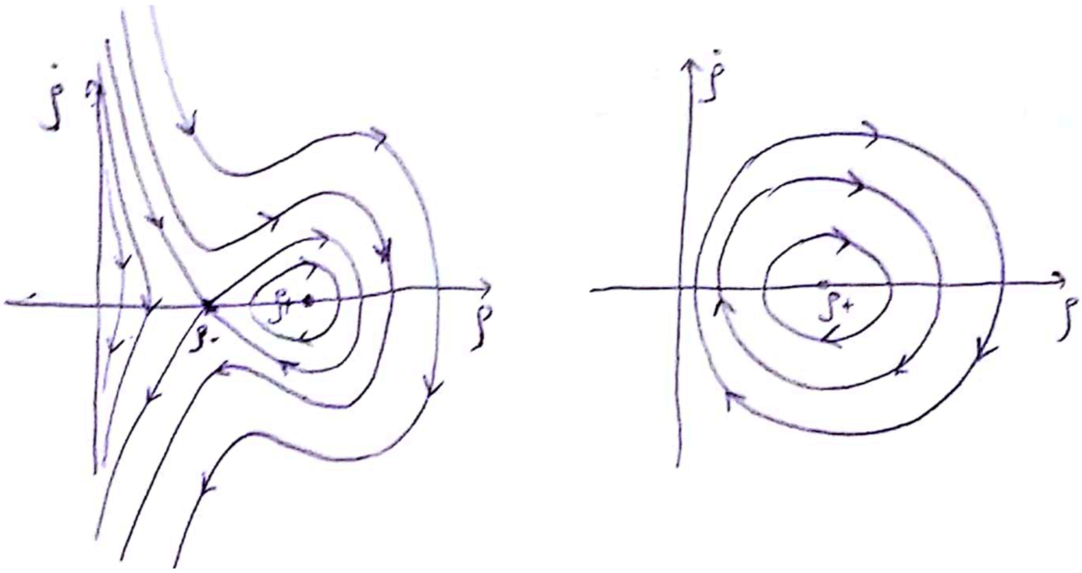


Figura 2: Grafico delle curve di livello.

Come evidente dal grafico, i moti radiali sono sempre limitati. Nel caso $L < \sqrt{mB}$, in aggiunta ai moti 'banali' sui punti di equilibrio, il sistema ammette sia moti che cadono sul centro, sia moti periodici. Nel caso $L \geq \sqrt{mB}$, in aggiunta al moto 'banale' $\rho(t) \equiv \rho_+$, il sistema ammette moti periodici.

5. Il caso più semplice in cui il moto complessivo è periodico è quello in cui $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$, con $\rho_{eq}$ un punto di equilibrio del moto radiale (quindi $\rho_{eq}$ può essere uguale a $\rho_-$ o a $\rho_+$, nel caso in cui $L < \sqrt{mB}$, mentre è uguale a $\rho_+$ nel caso in cui $L \geq \sqrt{mB}$). In tal caso, usando la relazione $\dot{\theta} = \frac{L}{m\rho^2}$, troviamo:
$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_e q^2} t.$$
Il moto complessivo è quindi circolare uniforme, di periodo
$$T = \frac{2\pi m\rho_e q^2}{L}.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema meccanico Lagrangiano unidimensionale associato alla Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\dot{q}^2}{\cosh^4 q} - \tanh^2 q\Big).$$

1. Si calcoli la funzione di Hamilton corrispondente e le relative equazioni di Hamilton.
2. Si dimostri che la trasformazione

$$Q = \frac{p}{f'(q)}, \qquad P = -f(q)$$

   è canonica, e si determini una funzione generatrice.
3. Si scelga la funzione $f(q)$ al punto precedente in modo tale da ridurre l'Hamiltoniana del sistema in considerazione a quella di un oscillatore armonico. Si usi la trasformazione per determinare la soluzione alle equazioni di Hamilton originali con dati iniziali $q(0) = 0$, $p(0) = 1$, e si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata le risolve.

**SOLUZIONE.**

1. La funzione di Hamilton è

$$H(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q})\Big|_{\dot{q}=v(q,p)},$$

   dove $v(q,p)$ è la funzione inversa, a $q$ fissato, della relazione seguente, che definisce il momento $p$ coniugato a $q$:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}}{\cosh^4 q}.$$

   Invertendo tale equazione a $q$ fissato, troviamo

$$\dot{q} = p\cosh^4 q,$$

   che, rimpiazzato nell'equazione precedente, ci dà

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2\cosh^4 q + \frac{1}{2}\tanh^2 q.$$

   Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p\cosh^4 q \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2p^2\cosh^3 q\,\sinh q - \frac{\tanh q}{\cosh^2 q}. \end{cases}$$

2. Per dimostrare che la trasformazione assegnata sia canonica, richiedo che la parentesi di Poisson tra $Q$ e $P$ sia uguale a 1:

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = 1,$$

ovvero

$$-\frac{1}{f'(q)} \cdot (-f'(q)) = 1,$$

che è sempre verificata. Cerco una funzione generatrice di prima specie $G(q, Q)$ per tale trasformazione, e a tal fine impongo:

$$p = Qf'(q) = \frac{\partial G}{\partial q}(q, Q), \qquad P = -f(q) = -\frac{\partial G}{\partial Q}(q, Q),$$

che implica immediatamente

$$G(q, Q) = Qf(q).$$

3. Per semplificare l'Hamiltoniana assegnata attraverso la trasformazione canonica $Q = \frac{p}{f'(q)}$, $P = -f(q)$, scelgo $f(q) = \tanh q$, in modo tale che

$$Q = p\cosh^2 q, \quad P = -\tanh q,$$

cosicché l'Hamiltoniana assegnata, nelle nuove variabili, diventa:

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{1}{2}(Q^2 + P^2).$$

Le equazioni di Hamilton per le $(Q, P)$ sono semplicemente

$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \dot{P} = -Q. \end{cases}$$

Si noti che i dati iniziali $q(0) = 0, p(0) = 1$ corrispondono a $Q(0) = 1, P(0) = 0$, quindi la soluzione all equazioni del moto nelle nuove variabili è

$$Q(t) = \cos t, \qquad P(t) = -\sin t.$$

Usando la trasformazione canonica inversa trovo la soluzione nelle variabili originali:

$$q(t) = \operatorname{arctanh}(\sin t), \qquad p(t) = \frac{\cos t}{\cosh^2 q(t)} = \cos^3 t,$$

dove nell'ultima equazione abbiamo usato che

$$\cosh^2 q(t) = \frac{1}{1-\tanh^2 q(t)} = \frac{1}{1-\sin^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Rimane da verificare che tale soluzione risolve le equazioni di Hamilton originali. A tal fine, deriviamo la soluzione rispetto al tempo, e chiediamo che il risultato coincida con le equazioni di Hamilton:

$$\begin{aligned}
\dot{q}(t) &= \frac{1}{\cos t} \stackrel{?}{=} p(t)\cosh^4(t), \\
\dot{p}(t) &= -3\cos^2 t \sin t \stackrel{?}{=} -2p^2(t)\cosh^4 q(t)\ \tanh q(t) - \frac{\tanh q(t)}{\cosh^2 q(t)}.
\end{aligned}$$

Ricordando che: $p(t) = \cos^3 t$, $\cosh^2 q(t) = 1/\cos^2 t$, e $\tanh q(t) = \sin t$, è immediato verificare che tali identità sono soddisfatte.