FM210 / MA - Quinto scritto (19-2-2018)

Esercizio 1. Il moto di una particella di massa m in $\mathbb{R}^3$ è descritto dall'equazione:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} + \frac{A}{|\mathbf{r}|^2}\mathbf{r} - \frac{B}{|\mathbf{r}|^4}\mathbf{r},$$

dove k, A e B sono parametri positivi e $B < \frac{A^2}{4k}$.

1. Si stabilisca se la forza è conservativa e, in caso, si calcoli il potenziale corrispondente.

2. Si identifichino le grandezze conservate del moto.

3. Si disegni il grafico del potenziale efficace per il moto radiale, al variare delle grandezze conservate.

4. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, con $\rho = |\mathbf{r}|$, al variare delle grandezze conservate, e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

5. Si esibiscano valori dei dati iniziali e delle grandezze conservate per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (se possibile, esplicitamente, altrimenti in termini di un integrale definito).

<u>Esercizio 2</u>. Si consideri il sistema meccanico Lagrangiano unidimensionale associato alla Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\dot{q}^2}{\cosh^4 q} - \tanh^2 q\Big).$$

1. Si calcoli la funzione di Hamilton corrispondente e le relative equazioni di Hamilton.
2. Si dimostri che la trasformazione

   $$Q = \frac{p}{f'(q)}, \qquad P = -f(q)$$

   è canonica, e si determini una funzione generatrice.
3. Si scelga la funzione $f(q)$ al punto precedente in modo tale da ridurre l'Hamiltoniana del sistema in considerazione a quella di un oscillatore armonico. Si usi la trasformazione per determinare la soluzione alle equazioni di Hamilton originali con dati iniziali $q(0) = 0$, $p(0) = 1$, e si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata le risolve.