FM210 / MA - Quarto scritto (24-1-2018)

<u>Esercizio 1</u>. Il moto di una particella di massa m in $\mathbb{R}^3$ è descritto dall'equazione:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -A\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + B\mathbf{r}|\mathbf{r}|^2,$$

dove A e B sono parametri positivi.

1. Si stabilisca se la forza è conservativa e, in caso, si calcoli il potenziale corrispondente.

2. Si identifichino le grandezze conservate del moto.

3. Si disegni il grafico del potenziale efficace per il moto radiale, al variare delle grandezze conservate.

4. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, con $\rho = |\mathbf{r}|$, al variare delle grandezze conservate, e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

5. Si esibiscano valori dei dati iniziali e delle grandezze conservate per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (se possibile, esplicitamente, altrimenti in termini di un integrale definito).

6. Nel caso di moti aperti, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o no.

Esercizio 2. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{q}{2}\sin(4p).$$

1. Si scrivano le equazioni di Hamilton.

2. Determinare per quali valori dei parametri a e b la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= q^a \cos(2p) \\ P &= \sqrt{q}\sin(bp), \end{aligned}$$

   definita per $q \geq 0$, è canonica. Per tale trasformazione canonica, si determini una trasformazione inversa.

3. Calcolare una funzione generatrice di terza specie $G = G(Q,p)$ per la trasformazione canonica trovata al punto precedente.

4. Si usi la trasformazione di coordinate trovata sopra per risolvere le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 2$, $p(0) = \pi/8$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.