FM210 / MA - Quarto scritto (24-1-2018)

<u>Esercizio 1</u>. Il moto di una particella di massa m in $\mathbb{R}^3$ è descritto dall'equazione:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -A\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + B\mathbf{r}|\mathbf{r}|^2,$$

dove A e B sono parametri positivi.

1. Si stabilisca se la forza è conservativa e, in caso, si calcoli il potenziale corrispondente.

2. Si identifichino le grandezze conservate del moto.

3. Si disegni il grafico del potenziale efficace per il moto radiale, al variare delle grandezze conservate.

4. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, con $\rho = |\mathbf{r}|$, al variare delle grandezze conservate, e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

5. Si esibiscano valori dei dati iniziali e delle grandezze conservate per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (se possibile, esplicitamente, altrimenti in termini di un integrale definito).

6. Nel caso di moti aperti, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o no.

SOLUZIONE.

1. La forza assegnata è centrale, e quindi conservativa. Si noti che

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (-A + B\rho^3)\hat{\mathbf{r}},$$

dove $\rho = |\mathbf{r}|$ e $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$. Il potenziale centrale $V(\rho)$, soddisfa quindi la condizione

$$V'(\rho) = A - B\rho^3,$$

cosicché

$$V(\rho) = A\rho - \frac{B}{4}\rho^4.$$

2. Come ogni equazione di Newton in campo centrale, il problema ammette come grandezze conservate l'energia meccanica
$$E = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(|\mathbf{r}|),$$
e le tre componenti del momento angolare
$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}.$$

3. Per semplicità, discuto solo il caso $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$. Come ogni problema in campo centrale, il moto si svolge sul piano ortogonale a $\mathbf{L}$, e su tale piano conviene passare a coordinate polari (ρ, θ). L'equazione effettiva per il moto radiale $\rho(t)$ è
$$m\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho),$$
dove
$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} = -\frac{B}{4}\rho^4 + A\rho + \frac{L^2}{2m\rho^2}.$$
Per disegnare il grafico qualitativo del potenziale efficace, al variare di $L > 0$, notiamo che $V_{eff}(\rho)$ tende a $+\infty$ per $\rho \to 0^+$, e tende a $-\infty$ per $\rho \to +\infty$. Inoltre, la derivata prima ha la seguente forma:
$$V'_{eff}(\rho) = -B\rho^3 + A - \frac{L^2}{m\rho^3} = -\frac{B}{\rho^3}(\rho^6 - \frac{A}{B}\rho^3 + \frac{L^2}{mB}),$$
che si annulla in $\rho = \rho_\pm$, con
$$\rho_\pm = \left[\frac{A}{2B} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4B^2} - \frac{L^2}{mB}}\right]^{1/3},$$
a patto che le due radici siano positive. In tal caso, V_{eff} è decrescente per $0 < \rho < \rho_-$ e per $\rho > \rho_+$, mentre è crescente per $\rho_- < \rho < \rho_+$. Nel caso in cui le due radici non sono reali (il che succede per $L > \frac{A}{2}\sqrt{\frac{m}{B}}$), il potenziale efficace è sempre decrescente. Il grafico qualitativo del potenziale efficace, al variare di $L > 0$, è mostrato in figura.

4. L'equazione delle curve di livello è data dalla conservazione dell'energia meccanica
$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))},$$
il cui grafico nel piano delle fasi di ridotto, al variare di E ed L è mostrato in figura.

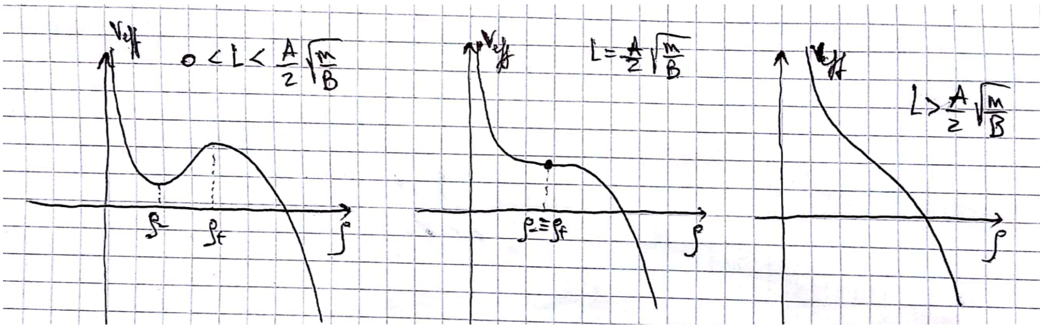

Figura 1: Grafico del potenziale

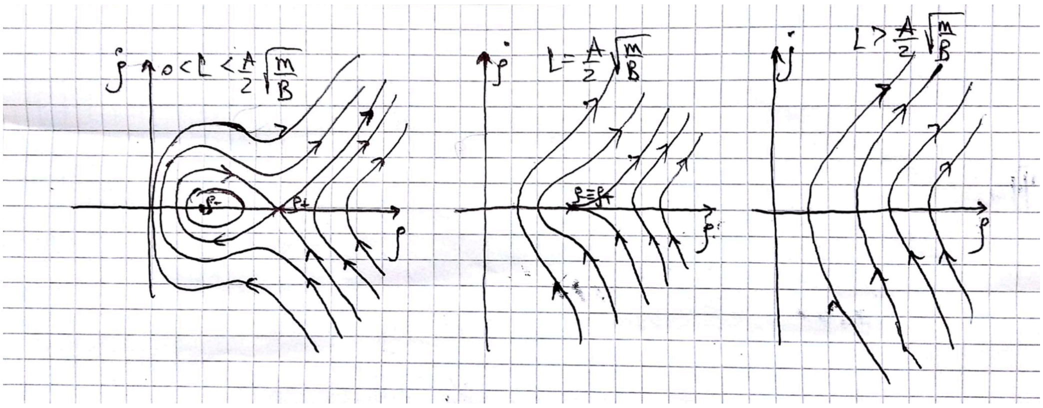

Figura 2: Grafico delle curve di livello

5. Il caso più semplice in cui il moto complessivo è periodico è quello in cui $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$, con ρ_{eq} un punto di equilibrio del moto radiale (quindi ρ_{eq} può essere uguale a ρ_- o a ρ_+, nel caso in cui $0 < L < \frac{A}{2}\sqrt{\frac{m}{B}}$; o può essere uguale a $\rho_- \equiv \rho_+$ nel caso in cui $L = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{m}{B}}$). In tal caso, usando la relazione $\dot{\theta} = \frac{L}{m\rho^2}$, troviamo:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_{eq}^2} t.$$

Il moto complessivo è quindi circolare uniforme, di periodo

$$T = \frac{2\pi m \rho_{eq}^2}{L}.$$

6. Il tempo di fuga all'infinito da un punto a distanza ρ_0 dall'origine è dato da:

$$t_\infty = \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho)}}.$$

Tale tempo è finito o infinito a seconda che la funzione integranda sia integrabile o meno all'infinito. Si noti che, per $\rho \to \infty$, $V_{eff}(\rho) \sim -\frac{B}{4}\rho^4$, cosicché la funzione integranda $\sim \sqrt{\frac{2m}{B}}\frac{1}{\rho^2}$, che è integrabile all'infinito. Quindi il tempo di fuga è finito, e di conseguenza la soluzione corrispondente non è definita globalmente nel tempo.

<u>Esercizio 2</u>. Si consideri l''Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{q}{2}\sin(4p).$$

1. Si scrivano le equazioni di Hamilton.
2. Determinare per quali valori dei parametri a e b la trasformazione

$$\begin{aligned} Q &= q^a \cos(2p) \\ P &= \sqrt{q}\sin(bp), \end{aligned}$$

definita per $q \geq 0$, è canonica. Per tale trasformazione canonica, si determini una trasformazione inversa.
3. Calcolare una funzione generatrice di terza specie $G = G(Q,p)$ per la trasformazione canonica trovata al punto precedente.
4. Si usi la trasformazione di coordinate trovata sopra per risolvere le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 2$, $p(0) = \pi/8$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.

SOLUZIONE.

1. Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2q\cos(4p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{1}{2}\sin(4p) \end{cases}$$

2. Per imporre che la trasformazione assegnata sia canonica, richiedo che la parentesi di Poisson tra Q e P sia uguale a 1:

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\cdot\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial q} = 1,$$

ovvero
$$q^{a-\frac{1}{2}}(ab\cos(2p)\cos(bp)+\sin(2p)\sin(bp))=1.$$
Devo imporre che il membro di sinistra sia indipendente da q e p: questo implica immediatamente che $a=1/2$, cosicché la condizione su b diventa:
$$\frac{b}{2}\cos(2p)\cos(bp)+\sin(2p)\sin(bp)=1.$$
Ponendo $b=2$ otteniamo l'identità
$$\cos^2(2p)+\sin^2(2p)=1,$$
come desiderato. Quindi la trasformazione assegnata è canonica per $a=1/2$ e $b=2$, nel qual caso si riduce a
$$\begin{aligned}Q&=\sqrt{q}\cos(2p)\\ P&=\sqrt{q}\sin(2p).\end{aligned}$$
Elevando le due equazioni al quadrato e prendendone la somma, trovo: $q=Q^2+P^2$. Prendendone il rapporto, trovo: $\tan(2p)=P/Q$. Una trasformazione inversa è quindi:
$$\begin{aligned}q&=Q^2+P^2\\ p&=\frac{1}{2}\arctan(P/Q).\end{aligned}$$

3. Cerco $G=G(Q,p)$ tale che
$$\begin{aligned}q&=\frac{\partial G}{\partial p}=\frac{Q^2}{\cos^2(2p)}\\ P&=\frac{\partial G}{\partial Q}=Q\tan(2p),\end{aligned}$$
che implica immediatamente
$$G(Q,p)=\frac{Q^2}{2}\tan(2p).$$

4. L'Hamiltoniana del problema ha la forma: $H=q\sin(2p)\cos(2p)=q\tan(2p)\cos^2(2p)$. Ricordando che $\cos^2(2p)=\frac{1}{1+\tan^2(2p)}$, che $\tan(2p)=P/Q$ e $q=Q^2+P^2$, troviamo che l'Hamiltoniana nelle nuove variabili prende la forma
$$\tilde{H}(Q,P)=(Q^2+P^2)\frac{P}{Q}\frac{1}{1+P^2/Q^2}=QP.$$

Le equazioni di Hamilton per le Q e le P sono quindi:

$$\dot{Q} = Q, \qquad \dot{P} = -P,$$

la cui soluzione è

$$Q(t) = Q_0 e^t, \qquad P(t) = P_0 e^{-t},$$

con Q_0, P_0 i dati iniziali nelle nuove variabili. Usando la trasformazione canonica trovata sopra, troviamo che l'immagine dei dati iniziali $q(0) = 2$, $p(0) = \pi/8$ è

$$Q_0 = 1, \qquad P_0 = 1,$$

cosicché

$$Q(t) = e^t, \qquad P(t) = e^{-t},$$

e, usando la trasformazione canonica inversa:

$$q(t) = e^{2t} + e^{-2t}, \qquad p(t) = \frac{1}{2}\arctan(e^{-2t}).$$

Verifichiamo esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Hamilton originali; ovvero, verifichiamo che

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = 2q(t)\cos(4p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{1}{2}\sin(4p(t)). \end{cases}$$

Si noti che $\cos(4p) = 2\cos^2 2p - 1 = (1-\tan^2(2p))/(1+\tan^2(2p))$, e che $\sin(4p) = 2\sin(2p)\cos(2p) = 2\tan(2p)/(1+\tan^2(2p))$. Dalla soluzione esplicita trovata sopra, troviamo in particolare che $\tan(2p(t)) = e^{-2t}$, cosicché le equazioni da verificare diventano

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = 2(e^{2t} + e^{-2t})\frac{(1-e^{-4t})}{(1+e^{-4t})} = 2(e^{2t} - e^{-2t}) \\ \dot{p}(t) = -\frac{e^{-2t}}{1+e^{-4t}}, \end{cases}$$

che sono immediatamente verificate dalla soluzione trovata sopra.