FM210 / MA - Secondo scritto (6-7-2017)

<u>ESERCIZIO 1.</u> Un'asta rigida omogenea di lunghezza ℓ e massa M è vincolata a muoversi su un piano verticale di coordinate x-y (con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale, orientato verso l'alto), in modo tale che il suo estremo A appartenga all'asse verticale di equazione $x = 0$ e l'estremo B appartenga all'asse orizzontale di equazione $y = 0$. I vincoli cui l'asta è soggetta si possono tutti supporre ideali. Oltre alla forza peso (e alle forze di reazione vincolare), l'asta è soggetta a una forza elastica di richiamo verso l'origine di costante elastica k, applicata all'estremo B. Si supponga che la costante elastica k soddisfi la condizione $k > \frac{Mg}{2\ell}$.

1. Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinata Lagrangiana l'angolo formato dall'asta con l'asse orizzontale. [Si ricordi che il momento di inerzia di un'asta omogenea di massa M e lunghezza ℓ attorno a un asse passante per il baricentro e ortogonale all'asse è $I = \frac{1}{12}M\ell^2$].

2. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange e si identifichi una grandezza conservata .

3. Si risolva l'equazione del moto per quadrature. Dopo aver disegnato le curve di livello nel piano delle fasi, si discuta la natura qualitativa del moto.

4. Si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabili.

<u>Esercizio 2.</u> Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2 q^2}{2} - \frac{q^2}{2}.$$

1. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange
2. Si ricavi l'Hamiltoniana corrispondente e si scrivano le equazioni di Hamilton.
3. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice di seconda specie $S(q,P)$ che mappi l'Hamiltoniana originale in $\tilde{H}(Q,P) = P$.
4. Dopo aver determinato una soluzione $S(q,P)$ all'equazione di Hamilton-Jacobi, si determini la trasformazione canonica corrispondente e se ne calcoli l'inversa, specificando dominio e codominio della trasformazione.
5. Si verifichi esplicitamente che la trasformazione determinata sopra è canonica, calcolando le parentesi di Poisson fondamentali.
6. Usando la trasformazione canonica determinata sopra, si risolvano le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1$, $p(0) = 1$. Si verifichi che la soluzione trovata risolve l'equazione di Eulero-Lagrange originale.