FM210 / MA - Secondo scritto (6-7-2017)

<u>Esercizio 1.</u> Un'asta rigida omogenea di lunghezza ℓ e massa M è vincolata a muoversi su un piano verticale di coordinate x-y (con l'asse x orizzontale e l'asse y verticale, orientato verso l'alto), in modo tale che il suo estremo A appartenga all'asse verticale di equazione $x = 0$ e l'estremo B appartenga all'asse orizzontale di equazione $y = 0$. I vincoli cui l'asta è soggetta si possono tutti supporre ideali. Oltre alla forza peso (e alle forze di reazione vincolare), l'asta è soggetta a una forza elastica di richiamo verso l'origine di costante elastica k, applicata all'estremo B. Si supponga che la costante elastica k soddisfi la condizione $k > \frac{Mg}{2\ell}$.

1. Si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinata Lagrangiana l'angolo formato dall'asta con l'asse orizzontale. [Si ricordi che il momento di inerzia di un'asta omogenea di massa M e lunghezza ℓ attorno a un asse passante per il baricentro e ortogonale all'asse è $I = \frac{1}{12}M\ell^2$].

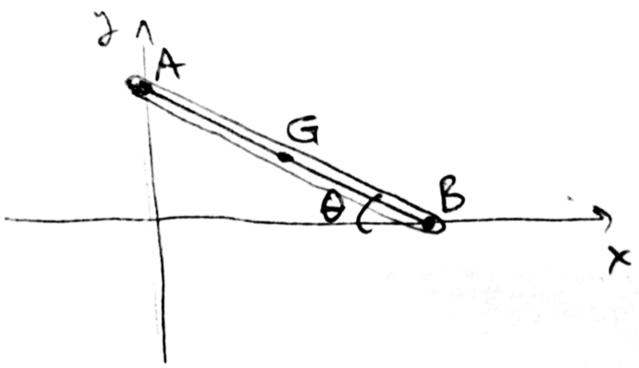
2. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange e si identifichi una grandezza conservata .

3. Si risolva l'equazione del moto per quadrature. Dopo aver disegnato le curve di livello nel piano delle fasi, si discuta la natura qualitativa del moto.

4. Si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabili.

SOLUZIONE.

1. Fissiamo la coordinata Lagrangiana θ come mostrato in figura.



Per ricavare la Lagrangiana del sistema, iniziamo a calcolare l'energia cinetica: questa consta della somma dell'energia cinetica traslazionale del centro di massa, più l'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa. In termini della variabile θ4 il centro di massa ha coordinate

$$\mathbf{x}_G = \frac{\ell}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

cosicché

$$\dot{\mathbf{x}}_G = \frac{\ell}{2}\dot\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

e quindi l'energia cinetica traslazionale del centro di massa è $T_{tr} = \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{x}}_G| = \frac{1}{8}M\ell^2\dot\theta^2$. L'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa è invece $T_{rot} = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 = \frac{1}{24}M\ell^2\dot\theta^2$, e quindi l'energia cinetica totale è

$$T = T_{tr} + T_{rot} = \frac{1}{6}M\ell^2\dot\theta^2.$$

L'energia potenziale del sistema è $Mgy_G + \frac{1}{2}kx_B^2$, dove y_G è la coordinata verticale del centro di massa, mentre x_B è la coordinata orizzontale dell'estremo B. In termini dell'angolo θ, si ha che $y_G = \frac{\ell}{2}\sin\theta$ e $x_B = \ell\cos\theta$, cosicché l'energia potenziale totale, espressa in termini di θ, è

$$V(\theta) = \frac{Mg\ell}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}k\ell^2\cos^2\theta.$$

La Lagrangiana del sistema è quindi

$$\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{6}M\ell^2\dot\theta^2 - V(\theta).$$

2. L'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\frac{1}{3}M\ell^2\ddot\theta = -V'(\theta),$$

che conserva l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{6}M\ell^2\dot\theta^2 + V(\theta).$$

3. Usando la conservazione dell'energia troviamo:

$$\dot\theta = \pm\sqrt{\frac{6}{M\ell^2}(E - V(\theta))}$$

da cui otteniamo la soluzione per quadrature:

$$t - t_0 = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{6}{M\ell^2}(E - V(\theta))}},$$

valida per porzioni di moto che si svolgono nel semipiano delle fasi positivo (i.e., $\dot{\theta} \geq 0$), o

$$t - t_0 = -\int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{6}{M\ell^2}(E - V(\theta))}},$$

valida per porzioni di moto che si svolgono nel semipiano delle fasi negativo (i.e., $\dot{\theta} \leq 0$).

Per visualizzare il moto risultante sul piano delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$, iniziamo a studiare il potenziale $V(\theta)$: per disegnarne il grafico studiamo il segno della derivata:

$$V'(\theta) = \frac{Mg\ell}{2}\cos\theta - k\ell^2\cos\theta\sin\theta \equiv \frac{Mg\ell}{2}\cos\theta\Big(1 - \frac{2k\ell}{Mg}\sin\theta\Big),$$

che: si annulla in $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, in $\theta = \theta_0$ e in $\theta = \pi - \theta_0$, con $\theta_0 = \arcsin(\frac{Mg}{2k\ell})$; è positivo per $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \theta_0) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi - \theta_0)$; è negativo per $\theta \in (\theta_0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi - \theta_0, \frac{3}{2}\pi)$. Si noti inoltre che il potenziale è simmetrico attorno a $\frac{\pi}{2}$, i.e., $V(\frac{\pi}{2} + x) = V(\frac{\pi}{2} - x)$, e che $V(\theta)$ è positivo se e solo se $\theta \in (-\alpha_0, \pi + \alpha_0)$, con $\alpha_0 = \arcsin\Big(\sqrt{1 + \frac{M^2g^2}{4k^2\ell^2}} - \frac{Mg}{2k\ell}\Big)$. Il grafico qualitativo del potenziale è mostrato in figura 1.

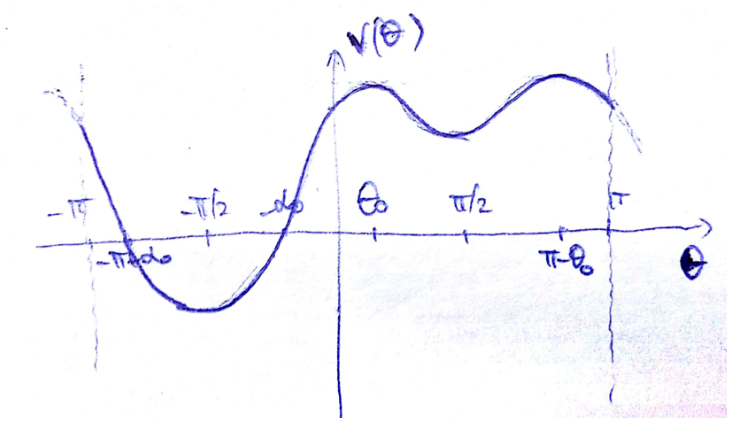


Figura 1: Grafico di $V(\theta)$

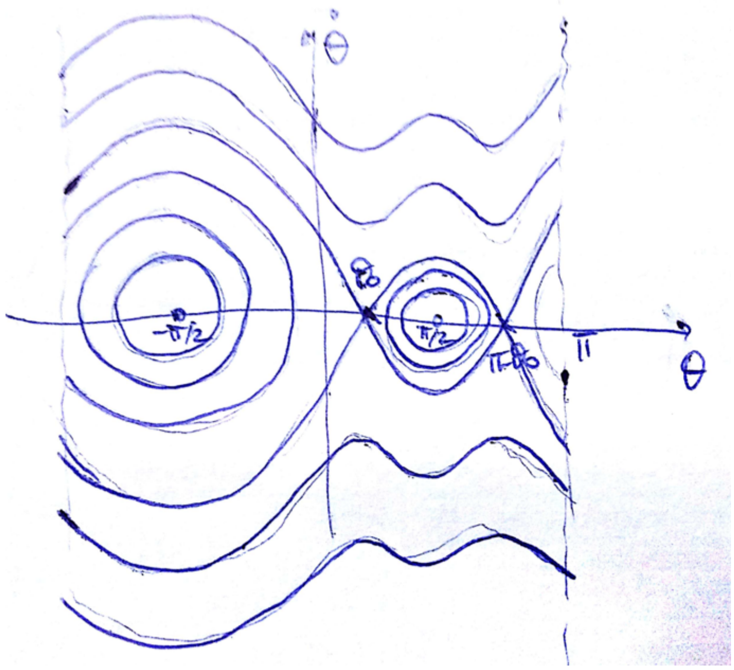


Figura 2: Curve di livello $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{6(E-V(\theta))}{M\ell^2}}$, al variare di E

Il grafico qualitativo delle curve di livello corrispondenti è mostrato in figura 2.

Il sistema ammette quattro punti di equilibrio: due stabili in $\pm\frac{\pi}{2}$ e due instabili in θ_0 e in $\pi - \theta_0$. Se il sistema parte da fermo in tali posizioni il moto risultante è 'banale', i.e., $\theta \equiv \theta_{eq}$. Altrimenti, il sistema svolge uno dei seguenti moti possibili:

- Se $V(-\frac{\pi}{2}) < E < V(\theta_0)$ e $-\pi - \theta_0 < \theta(0) < \theta_0$, allora il sistema svolge un moto periodico, che consiste in oscillazioni attorno a $-\frac{\pi}{2}$ che si svolgono tra due punti di inversione, in cui la velocità $\dot{\theta}$ cambia segno.
- Se $V(\frac{\pi}{2}) < E < V(\theta_0)$ e $\theta_0 < \theta(0) < \pi - \theta_0$, allora il sistema svolge un moto periodico, che consiste in oscillazioni attorno a $\frac{\pi}{2}$ che si svolgono tra due punti di inversione, in cui la velocità $\dot{\theta}$ cambia segno.
- Se $E = V(\theta_0)$ e $\theta_0 < \theta(0) < \pi - \theta_0$, allora il sistema svolge un moto a-periodico, che tende a θ_0 nel passato (i.e., per $t \to -\infty$) e a $\pi - \theta_0$ nel futuro (i.e., per $t \to \infty$), o viceversa; il moto avviene in modo tale che $\theta_0 < \theta(t) < \pi - \theta_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

- Se $E = V(\theta_0)$ e $-\pi - \theta_0 < \theta(0) < \theta_0$, allora il sistema svolge un moto a-periodico, che tende a θ_0 nel passato (i.e., per $t \to -\infty$) e a $\pi - \theta_0$ nel futuro (i.e., per $t \to \infty$), o viceversa; il moto avviene in modo tale che $-\pi - \theta_0 < \theta(t) < \theta_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- Se $E > V(\theta_0)$, allora il sistema svolge un moto periodico, che consiste in oscillazioni 'aperte', che si svolgono sempre in senso antiorario, o sempre in senso orario (i.e., la velocità $\dot{\theta}$ è sempre positiva, o sempre negativa).

4. L'equazione che descrive le piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio $\pm\frac{\pi}{2}$ ha la forma:

$$\frac{1}{3}M\ell^2\ddot{\theta} = -V''(\pm\frac{\pi}{2})(\theta \mp \frac{\pi}{2}),$$

dove

$$V''(\pm\frac{\pi}{2}) = -\frac{Mg\ell}{2}\sin\theta - k\ell^2\cos 2\theta\Big|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = k\ell^2(1 \mp \frac{Mg}{2k\ell}).$$

Si noti che sia $V''(\frac{\pi}{2})$ che $V''(-\frac{\pi}{2})$ sono positivi, come giusto. La frequenza delle piccoli oscillazioni attorno a $\pm\frac{\pi}{2}$ è

$$\omega_{\pm\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{3V''(\pm\frac{\pi}{2})}{M\ell^2}}.$$

Esercizio 2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2 q^2}{2} - \frac{q^2}{2}.$$

1. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange
2. Si ricavi l'Hamiltoniana corrispondente e si scrivano le equazioni di Hamilton.
3. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice di seconda specie $S(q,P)$ che mappi l'Hamiltoniana originale in $\tilde{H}(Q,P) = P$.
4. Dopo aver determinato una soluzione $S(q,P)$ all'equazione di Hamilton-Jacobi, si determini la trasformazione canonica corrispondente e se ne calcoli l'inversa, specificando dominio e codominio della trasformazione.
5. Si verifichi esplicitamente che la trasformazione determinata sopra è canonica, calcolando le parentesi di Poisson fondamentali.
6. Usando la trasformazione canonica determinata sopra, si risolvano le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1$, $p(0) = 1$. Si verifichi che la soluzione trovata risolve l'equazione di Eulero-Lagrange originale.

SOLUZIONE.

1. L'equazione di Eulero-Lagrange è

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}q^2) = \dot{q}^2 q - q,$$

che è equivalente a

$$\ddot{q}q^2 = -\dot{q}^2 q - q.$$

2. Usando la definizione di momento coniugato, $p = \dot{q}q^2$, troviamo che $\dot{q} = p/q^2$, cosicché

$$H(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q})\Big|_{\dot{q}=p/q^2} = \frac{p^2}{2q^2} + \frac{q^2}{2}.$$

Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{q^2} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p^2}{q^3} - q \end{cases}$$

3. L'equazione di Hamilton-Jacobi richiesta è

$$\frac{1}{2q^2}\Big(\frac{\partial S}{\partial q}\Big)^2 + \frac{q^2}{2} = P,$$

che implica

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \pm q\sqrt{2P - q^2}.$$

4. Consideriamo, ad esempio, il caso

$$\frac{\partial S}{\partial q} = q\sqrt{2P - q^2}.$$

Integrando l'equazione troviamo una soluzione nella forma:

$$S(q, P) = -\frac{1}{3}(2P - q^2)^{3/2}.$$

Per determinare la trasformazione canonica associata, usiamo il fatto che

$$\begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} = q\sqrt{2P - q^2} \\ Q = \frac{\partial S}{\partial P} = -\sqrt{2P - q^2} \end{cases}$$

che si può invertire nella forma

$$\begin{cases} Q = -\frac{p}{q} \\ P = \frac{p^2}{2q^2} + \frac{q^2}{2} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} q = \sqrt{2P - Q^2} \\ p = -Q\sqrt{2P - Q^2} \end{cases}$$

Si noti che la trasformazione canonica così determinata mappa in modo invertibile la regione $(q, p) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ in $(Q, P) \in \{\mathbb{R}^2 : P > Q^2/2\}$.

5. Vogliamo mostrare che $\{Q, P\} = 1$. Usando il fatto che $Q = -\frac{p}{q}$ e $P = \frac{p^2}{2q^2} + \frac{q^2}{2}$, troviamo

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{p}{q^2} \cdot \frac{p}{q^2} + \frac{1}{q}\Big(- \frac{p^2}{q^3} + q\Big) = 1,$$

come desiderato.

6. Le equazioni di Hamilton per le variabili (Q, P) sono, semplicemente:

$$\begin{cases} \dot{Q} = 1 \\ \dot{P} = 0 \end{cases}$$

che implicano $Q(t) = Q(0) + t$, $P(t) = P(0)$. I dati iniziali assegnati corrispondono a $Q(0) = -1$, $P(0) = 1$, cosicché la soluzione richiesta, nelle variabili (Q, P), prende la forma

$$Q(t) = t - 1, \quad P(t) = 1$$

Usando la trasformazione canonica inversa $q = \sqrt{2P - Q^2}$, $p = -Q\sqrt{2P - Q^2}$, troviamo

$$q(t) = \sqrt{2 - (t-1)^2}, \quad p(t) = -(t-1)\sqrt{2 - (t-1)^2}.$$

Derivando $q(t)$ troviamo

$$\dot{q} = -\frac{(t-1)}{q},$$

e derivando una seconda volta otteniamo

$$\ddot{q} = \frac{\dot{q}}{q^2}(t-1) - \frac{1}{q},$$

cosicché, notando che $t - 1 = -\dot{q}\, q$,

$$\ddot{q} = -\frac{\dot{q}^2}{q} - \frac{1}{q},$$

che è equivalente all'equazione di Eulero-Lagrange originale.