FM210 / MA - Terzo scritto (9-9-2017)

<u>Esercizio 1.</u> Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie di equazione $z = \ell \log \frac{x^2+y^2}{\ell^2}$, con $\ell > 0$. Il vincolo può supporsi ideale. Oltre alle forze di reazione vincolare, il punto è soggetto a due forze attive conservative: la forza peso, e la forza $\mathbf{F} = k \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, con $k > 0$.

1. Si descriva il vincolo in coordinate cilindriche (z, ρ, θ), e si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili ρ e θ.

2. Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica. Si identifichino le grandezze conservate del sistema.

3. Si risolvano le equazioni del moto per le variabili ρ e θ per quadrature. Dopo aver disegnato le curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare delle grandezze conservate del sistema, si discuta la natura qualitativa del moto radiale e del moto complessivo.

4. Si identifichino dati iniziali corrispondenti a un moto complessivo periodico, e si calcoli il periodo corrispondente.

<u>ESERCIZIO 2.</u> Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 q^2 e^{-q}.$$

1. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange.

2. Si determini l'Hamiltoniana corrispondente e si ricavino le equazioni di Hamilton.

3. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice di seconda specie $S(q, P)$ che mappi l'Hamiltoniana del sistema in $\tilde{H}(Q, P) = P^2/2$.

4. Dopo aver determinato una soluzione $S(q, P)$ all'equazione di Hamilton-Jacobi, si determini la trasformazione canonica corrispondente e se ne identifichi il dominio di definizione.

5. Usando la trasformazione canonica determinata sopra, si risolvano le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = p(0) = 1$. In particolare, si riconosca che $q(t) = f^{-1}(t)$ con f^{-1} l'inversa funzionale di $f(q) = -2(q + 2)e^{-q/2}$ per $q > 0$. Si identifichi l'intervallo di definizione della soluzione e si verifichi che tale soluzione risolve l'equazione di Eulero-Lagrange originale.