FM210 / MA - Terzo scritto (9-9-2017)

<u>Esercizio 1.</u> Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie di equazione $z = \ell \log \frac{x^2+y^2}{\ell^2}$, con $\ell > 0$. Il vincolo può supporsi ideale. Oltre alle forze di reazione vincolare, il punto è soggetto a due forze attive conservative: la forza peso, e la forza $\mathbf{F} = k \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, con $k > 0$.

1. Si descriva il vincolo in coordinate cilindriche (z, ρ, θ), e si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili ρ e θ.

2. Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica. Si identifichino le grandezze conservate del sistema.

3. Si risolvano le equazioni del moto per le variabili ρ e θ per quadrature. Dopo aver disegnato le curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare delle grandezze conservate del sistema, si discuta la natura qualitativa del moto radiale e del moto complessivo.

4. Si identifichino dati iniziali corrispondenti a un moto complessivo periodico, e si calcoli il periodo corrispondente.

SOLUZIONE.

1. L'equazione parametrica del vincolo in coordinate cilindriche ha la forma:
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ 2\ell\log(\rho/\ell) \end{pmatrix}$$
La velocità di un punto che si muove sul vincolo è, in tali coordinate,
$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 2\ell/\rho \end{pmatrix} + \rho\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$
cosicché l'energia cinetica del sistema prende la forma:
$$T = \frac{m}{2}\Big[\dot{\rho}^2\big(1 + 4\frac{\ell^2}{\rho^2}\big) + \rho^2\dot{\theta}^2\Big].$$

La forza attiva gravitazionale è associata al potenziale $U_1 = mgz$, mentre la forza attiva $\mathbf{F} = k \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ è associata al potenziale $U_2 = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2)$. L'energia potenziale totale del sistema è quindi

$$V = mgz - \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$$

che, in coordinate adattate al vincolo, prende la forma:

$$V = 2mg\ell \log \frac{\rho}{\ell} - \frac{k}{2}\rho^2.$$

In conclusione, la Lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[\dot{\rho}^2(1 + 4\frac{\ell^2}{\rho^2}) + \rho^2\dot{\theta}^2\right] - 2mg\ell \log \frac{\rho}{\ell} + \frac{k}{2}\rho^2.$$

2. Il sistema assegnato, come ogni sistema meccanico, ammette l'energia come grandezza conservata:

$$E = \frac{m}{2}\left[\dot{\rho}^2(1 + 4\frac{\ell^2}{\rho^2}) + \rho^2\dot{\theta}^2\right] + 2mg\ell \log \frac{\rho}{\ell} - \frac{k}{2}\rho^2.$$

Inoltre, dalla forma della Lagrangiana al punto precedente, si vede che θ è una variabile ciclica: quindi il momento coniugato $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$ associato a θ è una grandezza conservata:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta} \equiv L,$$

che ha l'interpretazione di terza componente del momento angolare. In conclusione, il sistema ammette due grandezze conservate: l'energia E e il momento angolare L.

Si noti che, usando la conservazione di L, possiamo riesprimere $\dot{\theta}$ in termini di L e ρ:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m\rho^2},$$

cosicché l'energia meccanica può essere equivalentemente riscritta nella forma:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2(1+4\frac{\ell^2}{\rho^2}) + \frac{L^2}{2m\rho^2} + 2mg\ell \log \frac{\rho}{\ell} - \frac{k}{2}\rho^2 \equiv \frac{m}{2}\dot{\rho}^2(1+4\frac{\ell^2}{\rho^2}) + V_{eff}(\rho),$$

dove nell'ultima identità abbiamo introdotto il potenziale efficace

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + 2mg\ell \log \frac{\rho}{\ell} - \frac{k}{2}\rho^2.$$

3. Nel caso in cui $L = 0$, il moto si svolge lungo una semiretta passante per l'origine. Chiamando r la coordinata lungo tale semiretta, e assumendo $r > 0$, il sistema si riduce a un sistema conservativo unidimensionale, di energia:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2(1 + 4\frac{\ell^2}{r^2}) + 2mg\ell \log\frac{r}{\ell} - \frac{k}{2}r^2.$$

Il potenziale efficace, in questo caso, è uguale a $U(r) = 2mg\ell\log\frac{r}{\ell} - \frac{k}{2}r^2$, che è una funzione concava, che diverge a $-\infty$ sia per $r \to 0^+$ che per $r \to +\infty$, e quindi con un massimo globale nel punto r_1 in cui si annulla $U'(r) = 2mg\ell/r - kr$, i.e., $r_1 = \sqrt{2mg\ell/k}$. Tale punto è quindi un equilibrio instabile. Il sistema ammette: o il moto 'banale' sul punto di equilibrio, o moti aperti che divergono a $+\infty$ sia nel futuro che nel passato, o moti aperti che divergono a $+\infty$ nel futuro e cadono nell'origine nel passato (o viceversa), o moti che cadono nell'origine sia nel passato sia nel futuro, o moti critici che cadono nell'origine nel futuro e tendono al punto di equilibrio nel passato (o viceversa), o moti critici che divergono a $+\infty$ nel futuro e tendono al punto di equilibrio nel passato (o viceversa), a seconda della scelta dei dati iniziali.

La soluzione per quadrature corrispondente è

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r(t)} \sqrt{\frac{m(1 + 4\frac{\ell^2}{r^2})}{2(E - U(r))}}dr.$$

Nel caso invece in cui il momento angolare $L \neq 0$, il potenziale efficace tende a $+\infty$ per $\rho \to 0^+$ e a $-\infty$ per $\rho \to +\infty$. La derivata è uguale a

$$V'_{eff}(\rho) = -\frac{L^2}{m\rho^3} + \frac{2mg\ell}{\rho} - k\rho = -\frac{k}{\rho}\Big(\rho^4 - \frac{2mg\ell}{k}\rho^2 + \frac{L^2}{mk}\Big),$$

le cui radici sono date da

$$\rho^2 = \frac{mg\ell}{k} \pm \sqrt{\Big(\frac{mg\ell}{k}\Big)^2 - \frac{L^2}{mk}}.$$

Solo le radici positive sono accettabili fisicamente, quindi la derivata del potenziale efficace si può annullare se e solo se $\frac{|L|}{\sqrt{mk}} \leq \frac{mg\ell}{k}$. Distinguiamo quindi tre casi, a seconda del valore di $|L|$.

1) $\frac{|L|}{\sqrt{mk}} < \frac{mg\ell}{k}$: la derivata di V_{eff} si annulla per due valori distinti di ρ, che chiameremo ρ_1 e ρ_2:

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{mg\ell}{k} - \sqrt{\Big(\frac{mg\ell}{k}\Big)^2 - \frac{L^2}{mk}}}, \qquad \rho_2 = \sqrt{\frac{mg\ell}{k} + \sqrt{\Big(\frac{mg\ell}{k}\Big)^2 - \frac{L^2}{mk}}}.$$

Il grafico qualitativo di $V_{eff}(\rho)$ è mostrato in Fig.1, insieme a quello delle curve di livello

$$\dot\rho = \pm\sqrt{\frac{2(E - V_{eff}(\rho))}{m(1 + 4\frac{\ell^2}{\rho^2})}}$$

nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot\rho)$.

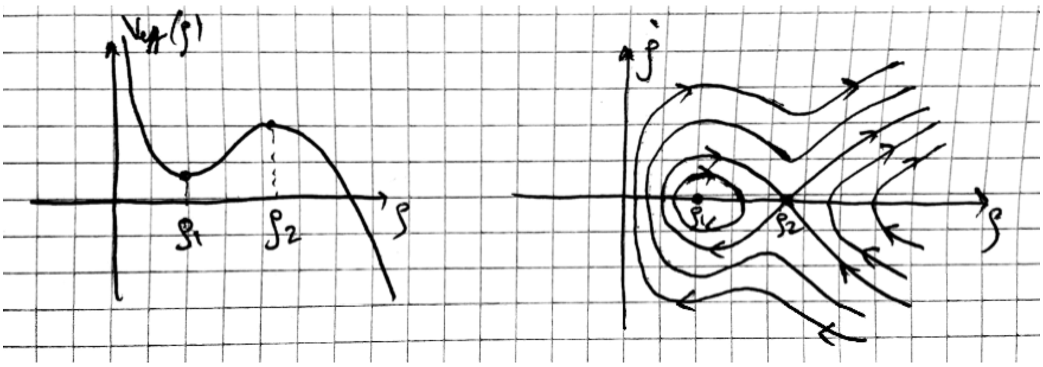

Figura 1: Grafico del potenziale e curve di livello nel caso (1)

2) $\frac{|L|}{\sqrt{mk}} = \frac{mg\ell}{k}$: la derivata di V_{eff} si annulla per un solo valore di ρ, che chiameremo ρ_1:

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{mg\ell}{k}}.$$

Il grafico qualitativo di $V_{eff}(\rho)$ è mostrato in Fig.2, insieme a quello delle curve di livello

$$\dot\rho = \pm\sqrt{\frac{2(E - V_{eff}(\rho))}{m(1 + 4\frac{\ell^2}{\rho^2})}}$$

nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot\rho)$.

3) $\frac{|L|}{\sqrt{mk}} > \frac{mg\ell}{k}$: la derivata di V_{eff} non si annulla mai: V_{eff} è una funzione monotona decrescente per $\rho > 0$. Il grafico qualitativo di $V_{eff}(\rho)$ è mostrato in Fig.3, insieme a quello delle curve di livello

$$\dot\rho = \pm\sqrt{\frac{2(E - V_{eff}(\rho))}{m(1 + 4\frac{\ell^2}{\rho^2})}}$$

nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot\rho)$.

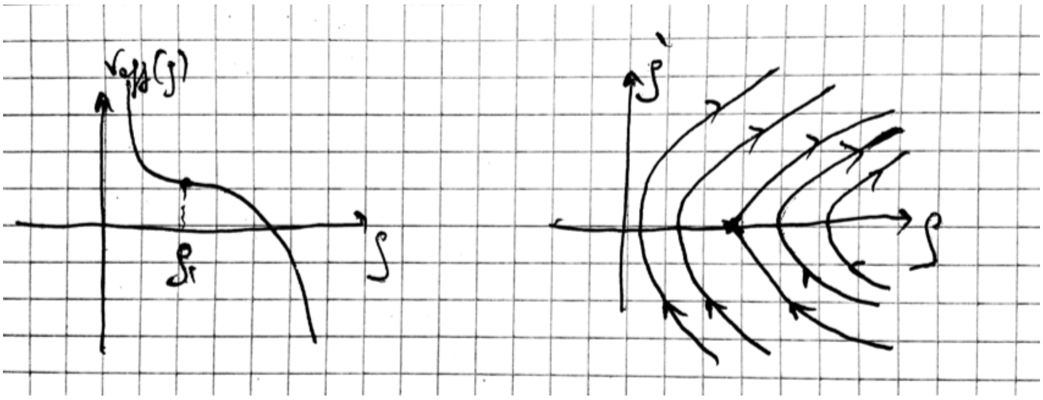

Figura 2: Grafico del potenziale e curve di livello nel caso (2)

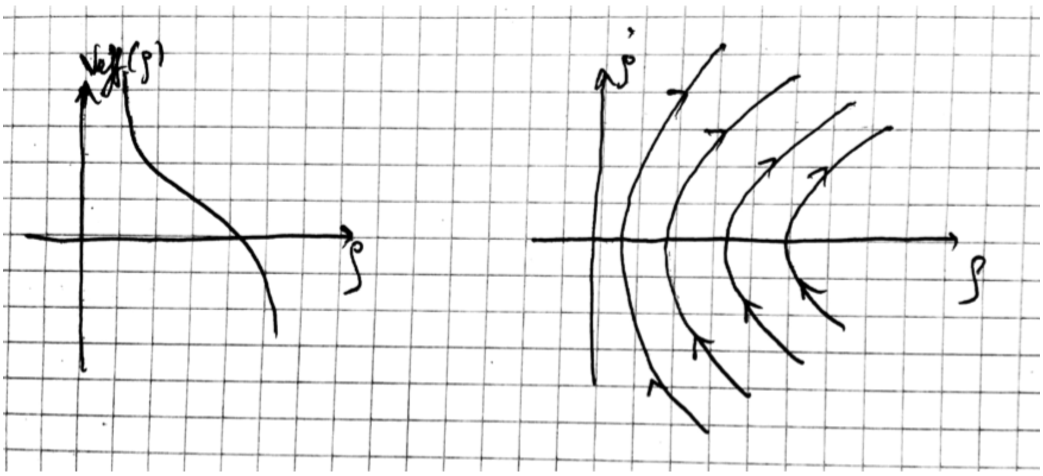

Figura 3: Grafico del potenziale e curve di livello nel caso (3)

La soluzione per quadrature è

$$t - t_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \sqrt{\frac{m(1+4\frac{\ell^2}{\rho^2})}{2(E - V_{eff}(\rho))}} d\rho.$$

Il sistema ammette moti aperti, che divergono all'infinito sia nel passato che nel futuro, in tutti i casi tranne i seguenti:

1) $\frac{|L|}{\sqrt{mk}} < \frac{mg\ell}{k}$.
(i) se $E = V_{eff}(\rho_i)$ e $\rho(0) = \rho_i$, con $i = 1, 2$, il moto è 'banale': $\rho(t) \equiv \rho_i$.
(ii) se $V_{eff}(rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$, il moto radiale è chiuso e periodico (consiste in oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile

ρ_1), di periodo

$$T = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \sqrt{\frac{m(1+4\frac{\ell^2}{\rho^2})}{2(E - V_{eff}(\rho))}}d\rho.$$

(iii) se $E = V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$, il moto è chiuso e aperiodico: tende asintoticamente al punto di equilibrio instabile ρ_2 sia nel passato che nel futuro.
(iv) se $E = V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) > \rho_2$, il moto è aperto: tende asintoticamente al punto di equilibrio instabile ρ_2 nel passato e diverge a $+\infty$ nel futuro (o viceversa).

2) $\frac{|L|}{\sqrt{mk}} < \frac{mg\ell}{k}$.
(i) se $E = V_{eff}(\rho_1)$ e $\rho(0) = \rho_1$, il moto è 'banale': $\rho(t) \equiv \rho_1$.
(ii) se $E = V_{eff}(\rho_1)$ e $\rho(0) > \rho_1$, il moto è aperto: tende asintoticamente al punto di equilibrio instabile ρ_1 nel passato e diverge a $+\infty$ nel futuro (o viceversa).

Una volta risolto per quadrature il moto radiale, il moto angolare si ottiene per integrazione diretta:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{m\rho^2(s)}ds.$$

4. Un caso particolarmente semplice si ha quando $\rho(t) \equiv \rho_i$, con $i = 1, 2$ nel qual caso

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_2 t,$$

con

$$\omega_2 = \frac{L}{m\rho_i^2}.$$

In tal caso il moto complessivo è circolare uniforme, di periodo

$$T_2 = \frac{2\pi m\rho_i^2}{L}.$$

In generale, se il moto radiale è periodico non banale, il moto angolare è quasi-periodico, e consiste nella somma di un moto periodico di periodo T_1 e di un moto circolare uniforme di periodo T_2, con

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}, \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{2}{T_1}\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{m\rho^2}\sqrt{\frac{m(1+4\frac{\ell^2}{\rho^2})}{2(E - V_{eff}(\rho))}}d\rho$$

Il moto complessivo sarà effettivamente quasi-periodico solo se $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$, e periodico altrimenti (se $T_1/T_2 = p/q$, con p e q interi primi tra loro, il periodo del moto complessivo è $T = T_1 q = T_2 p$).

Esercizio 2. Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 q^2 e^{-q}.$$

1. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange.
2. Si determini l'Hamiltoniana corrispondente e si ricavino le equazioni di Hamilton.
3. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice di seconda specie $S(q,P)$ che mappi l'Hamiltoniana del sistema in $\tilde{H}(Q,P) = P^2/2$.
4. Dopo aver determinato una soluzione $S(q,P)$ all'equazione di Hamilton-Jacobi, si determini la trasformazione canonica corrispondente e se ne identifichi il dominio di definizione.
5. Usando la trasformazione canonica determinata sopra, si risolvano le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = p(0) = 1$. In particolare, si riconosca che $q(t) = f^{-1}(t)$ con f^{-1} l'inversa funzionale di $f(q) = -2(q+2)e^{-q/2}$ per $q > 0$. Si identifichi l'intervallo di definizione della soluzione e si verifichi che tale soluzione risolve l'equazione di Eulero-Lagrange originale.

SOLUZIONE.

1. L'equazione di Eulero-Lagrange del sistema è

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{q}q^2e^{-q}\Big) = \dot{q}^2e^{-q}\Big(q - \frac{q^2}{2}\Big).$$

Svolgendo la derivata e si trova che tale equazione è equivalente a

$$\ddot{q} = \dot{q}^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\Big)$$

2. Il momento coniugato a q è

$$p = \dot{q}q^2e^{-q},$$

che si può invertire in $\dot{q} = \frac{p}{q^2}e^q$. L'Hamiltoniana del sistema è quindi

$$H = \Big[p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q})\Big]\Big|_{\dot{q}=\frac{p}{q^2}e^q} = \frac{p^2}{2q^2}e^q.$$

Le equazioni di Hamilton corrispondenti sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{q^2} e^q \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = p^2 e^q \left(\frac{1}{q^3} - \frac{1}{2q^2}\right) \end{cases}$$

3. L'equazione di Hamilton-Jacobi richiesta è:

$$\frac{e^q}{2q^2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = \frac{P^2}{2},$$

che implica

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \pm P q e^{-q/2}.$$

Scegliendo, ad esempio, la determinazione positiva, e integrando ambo i membri rispetto a q, troviamo come possibile soluzione:

$$S(q, P) = -2Pe^{-q/2}(q + 2).$$

4. La trasformazione canonica corrispondente alla funzione generatrice determinata sopra si ottiene invertendo la trasformazione:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} = Pqe^{-q/2} \\ Q = \frac{\partial S}{\partial P} = -2e^{-q/2}(q + 2) \end{cases}$$

che ci dà

$$\begin{cases} Q = -2e^{-q/2}(q + 2) \\ P = \frac{p}{q} e^{q/2} \end{cases}$$

Tale trasformazione è ben definita per $q \neq 0$. Se supponiamo, ad es., che $q > 0$, la trasformazione è invertibile da $(q, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ in $(Q, P) \in [-4, 0) \times \mathbb{R}$.

5. Per costruzione, l'Hamiltoniana nelle nuove variabili è $\tilde{H}(Q, P) = P^2/2$, le cui equazioni di Hamilton sono $\dot{Q} = P$, $\dot{P} = 0$, che sono risolte da

$$Q(t) = Q(0) + P(0)t, \quad P(t) \equiv P(0)$$

I dati iniziali assegnati corrispondono a $Q(0) = -6/\sqrt{e}$, $P(0) = \sqrt{e}$, cosicché la soluzione alle equazioni del moto è semplicemente

$$Q(t) = -\frac{6}{\sqrt{e}} + \sqrt{e}\, t, \quad P(t) \equiv \sqrt{e}.$$

Per ottenere la soluzione in termini delle variabili originali dobbiamo invertire tali equazioni. Ricordando che $Q = f(q)$, con $f(q) = -2(q + 2)e^{-q/2}$, otteniamo immediatamente che

$$q(t) = f^{-1}(-\frac{6}{\sqrt{e}} + \sqrt{e}\, t),$$

con f^{-1} l'inversa funzionale di $f(q)$. Si noti che tale inversa è ben definita, come funzione da $[-4, 0)$ a $[0, +\infty)$, poichè $f(q)$ è strettamente crescente, e quindi invertibile, su $q \in [0, +\infty)$: infatti $f'(q) = qe^{-q/2}$, che è positiva per q positiva.

Una volta ottenuta la soluzione per $q(t)$, la soluzione per p si trova usando che $P(t) = \frac{p(t)}{q(t)} e^{q(t)/2}$, cosicché, ricordando che $P(t) \equiv \sqrt{e}$,

$$p(t) = \sqrt{e}\, q(t) e^{-q(t)/2}.$$

Il dominio di definizione della soluzione si ottiene richiedendo che l'argomento di definizione di f^{-1} appartenga al suo dominio di definizione, $[-4, 0)$. Otteniamo quindi:

$$-4 \leq -\frac{6}{\sqrt{e}} + \sqrt{e}\, t < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{\sqrt{e}} + \frac{6}{e} \leq t < \frac{6}{e}.$$

Verifichiamo che la soluzione trovata per $q(t)$ verifica l'equazione di Eulero-Lagrange originale: derivando $q(t)$ e usando il teorema della derivazione della funzione inversa troviamo:

$$\dot{q}(t) = \frac{\sqrt{e}}{f'(q(t))} = \frac{e^{(q(t)+1)/2}}{q(t)}.$$

Derivando nuovamente troviamo:

$$\ddot{q}(t) = \dot{q}(t) e^{(q(t)+1)/2} \Big(\frac{1}{2q(t)} - \frac{1}{q^2(t)} \Big).$$

Ricordando che $\dot{q}(t) = \frac{e^{(q(t)+1)/2}}{q(t)}$, vediamo che tale equazione si può riscrivere nella forma

$$\ddot{q}(t) = \dot{q}^2(t) \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{q(t)} \Big),$$

come volevasi dimostrare.