1 Soluzione esercizio 2

a) Analizzando il sistema, possiamo vedere che le forze che agiscono sulle masse sono le seguenti:

- forza peso;
- forza elastica di costante k_1 tra la prima massa di coordinate (x_1, y_1) e l'origine;
- forza elastica di costante k tra le due masse;
- forza elastica di costante k_1 tra la seconda massa di coordinate (x_2, y_2) e il punto $(\ell, 0)$.

Pertanto, l'energia potenziale del sistema è la seguente:

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, y_1, y_2) =& mgy_1 + mgy_2 + \frac{1}{2}k_1(x_1^2 + y_1^2) + \\ & \frac{1}{2}k[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] + \frac{1}{2}k_1[(x_2 - \ell)^2 + y_2^2]. \end{aligned} \tag{1}$$

Calcoliamo il vettore gradiente di U.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= k_1 x_1 + k(x_1 - x_2) \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= -k(x_1 - x_2) + k_1(x_2 - \ell) \\ \frac{\partial U}{\partial y_1} &= mg + k_1 y_1 + k(y_1 - y_2) \\ \frac{\partial U}{\partial y_2} &= mg + k_1 y_2 - k(y_1 - y_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Possiamo notare che il sistema gode di una buona simmetria, in quanto le prime due componenti di ∇U dipendono solo dalle coordinate x_1, x_2 mentre le ultime due da y_1, y_2. Pertanto, decidiamo di decomporre il sistema nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_1 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ell k_1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_1 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mg \\ mg \end{pmatrix} \tag{4}$$

Quindi i punti di equilibrio risolvono le seguenti equazioni:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_1 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell k_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_1 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} mg \\ mg \end{pmatrix} \tag{6}$$

la cui soluzione è $\boldsymbol{r}_{eq} := (x_{1_{eq}}, x_{2_{eq}}, y_{1_{eq}}, y_{2_{eq}}) = (\frac{\ell k}{k_1+2k}, \frac{\ell(k_1+k)}{k_1+2k}, -\frac{mg}{k_1}, -\frac{mg}{k_1})$.

Per studiare la stabilità, è importante notare che le due matrici hessiane associate ai sistemi (3), (4), sono indipendenti dalle coordinate e sono della forma:

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_1 + k \end{pmatrix} \tag{7}$$

Inoltre per il criterio di Sylvester dei minori principali (che riportiamo nel paragrafo 1.1), tali matrici sono definite positive. Dunque, grazie al teorema di stabilità di Dirichlet, possiamo concludere che $\boldsymbol{r}_{eq}$ è una configurazione di equilibrio stabile.

b) L'equazione linearizzata per le piccole oscillazioni è della forma

$$M\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mathcal{H}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{eq}) \tag{8}$$

dove $M := m\mathbf{1}$ (con $\mathbf{1}$ matrice identità), $\boldsymbol{r} := (x_1, x_2, y_1, y_2)$, e $\mathcal{H}$ è la matrice hessiana, che ha la forma diagonale a blocchi:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_2 \end{pmatrix},$$

dove i blocchi sono matrici 2×2. Per calcolare le frequenze di oscillazione del sistema, che indicheremo con ω , dobbiamo risolvere l'equazione

$$\det \big(\mathcal{H} - \lambda M\big) = 0 \qquad \omega^2 = \lambda$$

che possiamo riscrivere come

$$\det \Big(\frac{1}{m}\mathcal{H} - \lambda \mathbf{1}\Big) = 0 \qquad \omega^2 = \lambda, \tag{9}$$

da cui otteniamo $\lambda = \frac{k_1+2k}{m}, \frac{k_1}{m}$, e ognuno dei due autovalori ha molteplicità doppia. Abbiamo perciò che le frequenze di oscillazione, uguali due a due, sono $\omega = \sqrt{\frac{k_1+2k}{m}}, \sqrt{\frac{k_1}{m}}$.

1.1 Criterio di Sylvester

Definizione 1. Sia $A \in Mat_{m\times n}$. Un *minore* di A è il determinante di una sua sottomatrice quadrata.
Se $A \in Mat_{n\times n}$ è una matrice quadrata, i minori sulla diagonale, si dicono *minori principali* di A e li indicheremo con D_i con $i = 1, \dots, n$.

Esempio 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \tag{10}$$

ha come minori principali $D_1 = 1, D_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ e $D_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Teorema 1. *Sylvester dei minori principali*

1. *Una matrice quadrata $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali sono positivi.*

2. *Una matrice quadrata $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è definita negativa se e solo se*

$$D_1 < 0,\ D_2 > 0, D_3 < 0, \dots$$