FM210 / MA - Primo scritto (16-6-2017)

ESERCIZIO 1. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie di un paraboloide di equazione $z + (x^2 + y^2)/\ell = 0$, con $\ell > 0$. Il vincolo può supporsi ideale. Oltre alla forza peso (e alle forze di reazione vincolare), il punto è soggetto a una forza di richiamo elastica verso l'origine di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Si supponga $k > 2mg/\ell$.

1. Si descriva il vincolo in coordinate cilindriche (z, ρ, θ), e si scriva la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili ρ e θ.
2. Si riconosca che il sistema ammette una coordinata ciclica. Si identifichino le grandezze conservate del sistema.
3. Si risolvano le equazioni del moto per le variabili ρ e θ per quadrature. Dopo aver disegnato le curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, si discuta la natura qualitativa del moto radiale e del moto complessivo.
4. Si identifichino dati iniziali corrispondenti a un moto complessivo periodico, e si calcoli il periodo corrispondente.

SOLUZIONE.

1. L'equazione parametrica del vincolo in coordinate cilindriche ha la forma:
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ -\rho^2/\ell \end{pmatrix}$$
La velocità di un punto che si muove sul vincolo è, in tali coordinate,
$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2\rho/\ell \end{pmatrix} + \rho\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$
cosicché l'energia cinetica del sistema prende la forma:
$$T = \frac{m}{2}\Big[\dot{\rho}^2\big(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2}\big) + \rho^2\dot{\theta}^2\Big].$$
L'energia potenziale, somma dell'energia elastica e dell'energia gravitazionale, è data da $V = \frac{k}{2}\mathbf{x}^2 + mgx_3$ che, in coordinate adattate al vincolo, prende la forma:
$$V = \frac{k}{2}(\rho^2 + \frac{\rho^4}{\ell^2}) - \frac{mg}{\ell}\rho^2.$$

In conclusione, la Lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\Big[\dot\rho^2(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2}) + \rho^2\dot\theta^2\Big] - \frac{1}{2}\Big(k - \frac{2mg}{\ell}\Big)\rho^2 - \frac{k}{2}\rho^4.$$

2. Il sistema assegnato, come ogni sistema meccanico, ammette l'energia come grandezza conservata:

$$E = \frac{m}{2}\Big[\dot\rho^2(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2}) + \rho^2\dot\theta^2\Big] + \frac{k'}{2}\rho^2 + \frac{k}{2}\rho^4,$$

dove $k' := k - 2mg/\ell > 0$. Inoltre, dalla forma della Lagrangiana al punto precedente, si vede che θ è una variabile ciclica: quindi il momento coniugato $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}$ associato a θ è una grandezza conservata:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = m\rho^2\dot\theta \equiv L,$$

che ha l'interpretazione di terza componente del momento angolare. In conclusione, il sistema ammette due grandezze conservate: l'energia E e il momento angolare L.

Si noti che, usando la conservazione di L, possiamo riesprimere $\dot\theta$ in termini di L e ρ:

$$\dot\theta = \frac{L}{m\rho^2},$$

cosicché l'energia meccanica può essere equivalentemente riscritta nella forma:

$$E = \frac{m}{2}\dot\rho^2(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2}) + \frac{L^2}{2m\rho^2} + \frac{k'}{2}\rho^2 + \frac{k}{2}\rho^4 \equiv \frac{m}{2}\dot\rho^2(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2}) + V_{eff}(\rho),$$

dove nell'ultima identità abbiamo introdotto il potenziale efficace

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + \frac{k'}{2}\rho^2 + \frac{k}{2}\rho^4.$$

3. Nel caso in cui $L = 0$, il moto si svolge lungo una retta passante per l'origine. Chiamando x la coordinata lungo tale retta, il sistema si riduce a un sistema conservativo unidimensionale, di energia:

$$E = \frac{m}{2}\dot x^2(1 + 4\frac{x^2}{\ell^2}) + \frac{1}{2}(k'x^2 + kx^4).$$

Il potenziale efficace, in questo caso, è uguale a $U(x) = \frac{1}{2}(k'x^2 + kx^4)$ che è una funzione pari, uniformemente convessa, e quindi con un minimo globale in $x = 0$. Tale punto è quindi un equilibrio stabile. Il sistema ammette o il moto 'banale' sul punto di equilibrio, o moti oscillatori (periodici) attorno al punto di equilibrio.

La soluzione per quadrature corrispondente è

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x(t)} \sqrt{\frac{m(1 + 4\frac{x^2}{\ell^2})}{2(E - U(x))}} dx.$$

Nel caso invece in cui il momento angolare $L \neq 0$, il potenziale efficace tende a $+\infty$ sia per $\rho \to 0^+$, sia per $\rho \to +\infty$. La derivata è uguale a

$$V'_{eff}(\rho) = -\frac{L^2}{m\rho^3} + k'\rho + 2k\rho^3,$$

mentre la derivata seconda è

$$V''_{eff}(\rho) = \frac{3L^2}{m\rho^4} + k' + 6k\rho^2,$$

che è sempre positiva per $\rho > 0$. Quindi $V_{eff}(\rho)$ è uniformemente convessa per $\rho > 0$, che implica, in particolare, che $V_{eff}(\rho)$ ammette un unico punto di minimo globale, che chiameremo ρ_0.

Il grafico qualitativo di $V_{eff}(\rho)$ è mostrato in Fig.1, insieme a quello delle curve di livello

$$\dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2(E - V_{eff}(\rho))}{m(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2})}}$$

nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$.

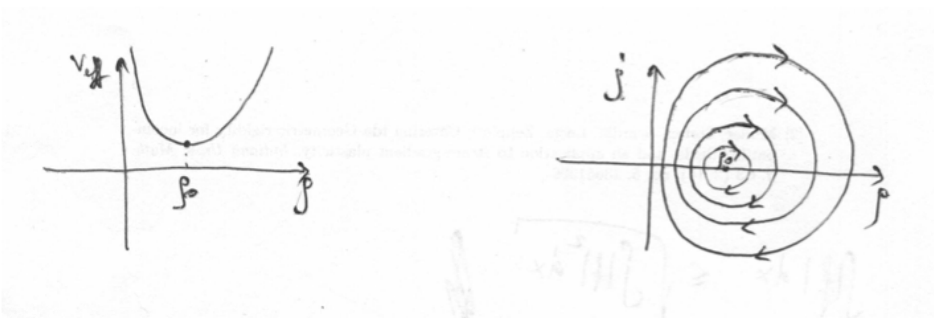

Figura 1: Curve di livello $\dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2(E - V_{eff}(\rho))}{m(1+4\frac{\rho^2}{\ell^2})}}$, al variare di E

La soluzione per quadrature è

$$t - t_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \sqrt{\frac{m(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2})}{2(E - V_{eff}(\rho))}} d\rho.$$

I moti radiali del sistema sono di due tipi: (1) moto 'banale' $\rho(t) \equiv \rho_0$; (2) moto periodico, che consiste in oscillazioni attorno a ρ_0, di periodo

$$T_1 = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \sqrt{\frac{m(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2})}{2(E - V_{eff}(\rho))}} d\rho$$

Una volta risolto per quadrature il moto radiale, il moto angolare si ottiene per integrazione diretta:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{m\rho^2(s)} ds.$$

4. Un caso particolarmente semplice si ha quando $\rho(t) \equiv \rho_0$, nel qual caso

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_2 t,$$

con

$$\omega_2 = \frac{L}{m\rho_0^2}.$$

In tal caso il moto complessivo è circolare uniforme, di periodo

$$T_2 = \frac{2\pi m\rho_0^2}{L}.$$

In generale, se il moto radiale è periodico non banale, il moto angolare è quasi-periodico, e consiste nella somma di un moto periodico di periodo T_1 e di un moto circolare uniforme di periodo T_2, con

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}, \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{2}{T_1} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{m\rho^2} \sqrt{\frac{m(1 + 4\frac{\rho^2}{\ell^2})}{2(E - V_{eff}(\rho))}} d\rho$$

Il moto complessivo sarà effettivamente quasi-periodico solo se $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$, e periodico altrimenti (se $T_1/T_2 = p/q$, con p e q interi primi tra loro, il periodo del moto complessivo è $T = T_1 q = T_2 p$).

Esercizio 2. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\frac{\log^2 p}{q^2}$$

per $p > 0, q > 0$.

1. Si scrivano le equazioni di Hamilton.

2. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione generatrice di seconda specie $S(q,P)$ che mappi l'Hamiltoniana originale in $\tilde{H}(Q,P) = P^2/2$.

3. Dopo aver determinato una soluzione $S(q,P)$ all'equazione di Hamilton-Jacobi, si determini la trasformazione canonica corrispondente.

4. Usando la trasformazione canonica determinata sopra, si risolvano le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1$, $p(0) = e$. In particolare, si riconosca che $q(t) = f^{-1}(t)$ con f^{-1} l'inversa funzionale di $f(q) = (q-1)e^q$ per $q > 0$. Si verifichi che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.

SOLUZIONE.

1. Le equazioni di Hamilton del sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\log p}{q^2 p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\log^2 p}{q^3} \end{cases}$$

2. L'equazione di Hamilton-Jacobi richiesta è:

$$\frac{1}{2q^2}\log^2\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{P^2}{2},$$

che implica

$$\log\frac{\partial S}{\partial q} = \pm Pq.$$

Scegliendo, ad esempio, la determinazione positiva troviamo:

$$\frac{\partial S}{\partial q} = e^{Pq},$$

che ci fornisce come possibile soluzione:

$$S(q,P) = \frac{e^{qP}}{P}.$$

3. La trasformazione canonica corrispondente alla funzione generatrice determinata sopra si ottiene invertendo la trasformazione:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} = e^{qP} \\ Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{(qP-1)e^{qP}}{P^2} \end{cases}$$

Invertendo la prima relazione troviamo $P = \frac{\log p}{q}$ che, sostituita nella seconda ci dà $Q = \frac{(\log p - 1)q^2 p}{\log^2 p}$. In conclusione, la trasformazione canonica (diretta) associata a $S(q, P)$ è

$$\begin{cases} Q = \frac{(\log p-1)q^2 p}{\log^2 p} \\ P = \frac{\log p}{q} \end{cases}$$

4. Per costruzione, l'Hamiltoniana nelle nuove variabili è $\tilde{H}(Q, P) = P^2/2$, le cui equazioni di Hamilton sono $\dot{Q} = P$, $\dot{P} = 0$, che sono risolte da

$$Q(t) = Q(0) + P(0)t, \quad P(t) \equiv P(0)$$

I dati iniziali assegnati corrispondono a $Q(0) = 0$, $P(0) = 1$, cosicché la soluzione alle equazioni del moto è semplicemente

$$Q(t) = t, \quad P(t) = 1.$$

Per ottenere la soluzione in termini delle variabili originali dobbiamo invertire tali equazioni. Notiamo innanzitutto che, dalla condizione che $P(t) \equiv 1$ troviamo che

$$\log p(t) = q(t) \quad \Leftrightarrow \quad p(t) = e^{q(t)}.$$

Usando questa relazione troviamo che

$$t = Q(t) = \frac{(\log p(t) - 1)q(t)^2 p(t)}{\log^2 p(t)} = (q(t) - 1)e^{q(t)} \equiv f(q(t)),$$

che mostra che $q(t) = f^{-1}(t)$, con f^{-1} l'inversa funzionale di $f(q) = (q-1)e^q$ [si noti che tale inversa è ben definita, come funzione da $(-1, +\infty)$ a $(0, +\infty)$, poichè $f(q)$ è strettamente crescente, e quindi invertibile, su $q \in (0, +\infty)$: infatti $f'(q) = qe^q$, che è positiva per q positiva].

Verifichiamo che la soluzione trovata verifica le equazioni di Hamilton originali: derivando $q(t)$ e usando il teorema della derivazione della funzione inversa troviamo:

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{f'(q(t))} = \frac{e^{-q(t)}}{q(t)} = \frac{\log p(t)}{q(t)^2 p(t)},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $p(t) = e^{q(t)}$. Quindi $\dot{q}(t)$ soddisfa la prima equazione di Hamilton. Infine, usando nuovamente che $p(t) = e^{q(t)}$, troviamo

$$\dot{p}(t) = \dot{q}(t)e^{q(t)} = \frac{1}{q(t)} = \frac{\log^2 p(t)}{q^3(t)},$$

come volevasi dimostrare.