Tutorato extra - MA/FM210

<u>ESERCIZIO 1.</u> **Scritto di Meccanica Analitica del 3-2-15** prof. E. Scoppola
Un sistema meccanico, posto in un piano verticale Π, è costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta, rigida, sottile, omogenea, AB di lunghezza $l = 2R$ e massa m. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare su un asse verticale y del piano Π, l'asta ha l'estremo A incernierato senza attrito nel centro C del disco e l'estremo B è connesso ad un asse orizzontale x da una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla (in modo che la molla lavora sempre in posizione verticale). Si considerino come variabili lagrangiane l'angolo θ che AB forma con l'asse x e la coordinata y del punto C.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
2. Trovare i punti di equilibrio, discutendone la stabilità, al variare dei parametri.

SOLUZIONE. Il disegno del sistema è:

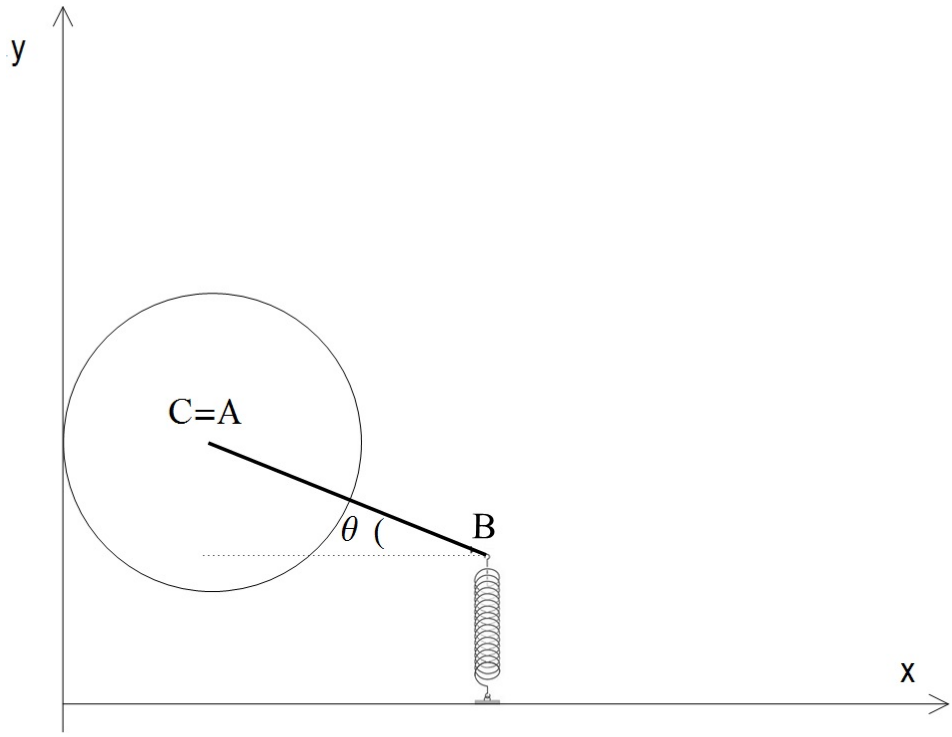

Figura 1: Sistema disco-asta

Si veda la soluzione all'esercizio 1 dello scritto del corso di Meccanica Analitica, del 3-2-15 disponibile al link: `http://www.mat.uniroma3.it/users/betta/mas/risultati/mas_sol_3_2_15.pdf`

Esercizio 2. Si consideri la trasformazione:

$$\begin{cases} Q = q^3 p^n \\ P = q^m p^l \end{cases}$$

1. Si fissino m, n, l affinché la trasformazione risultante sia canonica. Per tali valori dei parametri, si costruisca la trasformazione inversa, e si determinino i domini su cui le trasformazioni diretta e inversa sono definite.

2. Si usi la trasformazione trovata per integrare le equazioni di Hamilton di $\mathcal{H}(q,p) = q^6 p^4$ con dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 1$. Più precisamente: si mappi l'Hamiltoniana assegnata in una nuova Hamiltoniana $\tilde{H}(Q,P)$, si scrivano e risolvano le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili, e poi si torni alle variabili (q,p) usando la trasformazione canonica inversa.

SOLUZIONE.

1. Per determinare i valori di m, n e l per cui la trasformazione è canonica imponiamo $\{P,Q\} = 1$:

$$\{P,Q\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = q^{m+2}p^{n+l-1}[3l - nm] = 1 \Leftrightarrow \; n = 2 \;\; l = -1 \text{ e } m = -2$$

Pertanto la trasformazione è:

$$\begin{cases} Q = q^3 p^2 \\ P = q^{-2} p^{-1} \end{cases}$$

Da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} q = Q^{-1} P^{-2} \\ p = Q^2 P^3 \end{cases}$$

Quindi la trasformazione diretta è definita per $p \neq 0$ e $q \neq 0$, mentre la trasformazione inversa è definita per $P \neq 0$ e $Q \neq 0$.

2. L'Hamiltoniana $\mathcal{H}(q,p)$ viene mappata nell'Hamiltoniana $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P) = Q^2$. Le nuove equazioni Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = -2Q \end{cases}$$

I dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1,1)$ corrispondono ai datai iniziali $(Q(0), P(0)) = (1,1)$. Troviamo le soluzioni delle equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = -2Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(t) = 1 \\ \dot{P} = -2Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(t) = 1 \\ P(t) = -2t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(t) = (1-2t)^{-2} \\ p(t) = (1-2t)^3 \end{cases}$$