

### Soluzioni Tutorato 1 (10/3/2017)

**Esercizio 1** Si consideri la forza posizionale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita come segue:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} kx_1 \cos^2 ax_3 \\ kx_2 \cos^2 ax_3 \\ -\frac{ak}{2}(x_1^2 + x_2^2) \sin 2ax_3 \end{pmatrix},$$

dove  $k$  e  $a$  sono parametri positivi. Si stabilisca se  $\mathbf{F}$  è conservativa e, in caso, si determini l'energia potenziale corrispondente.

**SOLUZIONE** Si noti che  $\mathbb{R}^3$  è uno spazio semplicemente connesso quindi la condizione necessaria perché  $F$  sia conservativa (derivate in croce uguali a due a due) è anche una condizione sufficiente. Calcoliamo quindi le derivate incrociate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} &= 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} &= -2akx_1 \cos(ax_3) \sin(ax_3) = -akx_1 \sin(2ax_3) = \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_3} &= -2akx_2 \cos(ax_3) \sin(ax_3) = -akx_2 \sin(2ax_3) = \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Quindi  $\mathbf{F}$  è conservativa. Determiniamo ora l'energia potenziale:

$$-\frac{\partial U}{\partial x_1} = F_1 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = -kx_1 \cos^2 ax_3 \Rightarrow U(x_1, x_2, x_3) = -k\frac{x_1^2}{2} \cos^2(ax_3) + c(x_2, x_3)$$

Dove  $c(x_2, x_3)$  indica una funzione dipendente solo dalle variabili  $x_2$  e  $x_3$ . Calcoliamoci esplicitamente  $c(x_2, x_3)$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x_2} = F_2 &\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial c(x_2, x_3)}{\partial x_2} = -F_2 = -kx_2 \cos^2 ax_3 \Rightarrow c(x_2, x_3) = -k\frac{x_2^2}{2} \cos^2(ax_3) + b(x_3) \\ &\Rightarrow U(x_1, x_2, x_3) = -k\frac{x_1^2}{2} \cos^2(ax_3) - k\frac{x_2^2}{2} \cos^2(ax_3) + b(x_3) \end{aligned}$$

dove  $b(x_3)$  indica una funzione dipendente solo dalla variabile  $x_3$ . Calcoliamoci esplicitamente  $b(x_3)$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial x_3} = F_3 &\Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x_3} = -k(x_1^2 + x_2^2)a \cos(ax_3) \sin(ax_3) + b'(x_3) = F_3 = -ak\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \sin(2ax_3) \\ &\Rightarrow b'(x_3) = 0 \Rightarrow b(x_3) = cost \\ U(x_1, x_2, x_3) &= -k\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2} \cos^2(ax_3) \end{aligned}$$

**Esercizio 2** Si consideri la forza posizionale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita come segue:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} ax_2 \frac{x_2^2 - x_1^2}{|\mathbf{x}|^4} \\ ax_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{|\mathbf{x}|^4} \end{pmatrix},$$

dove  $a$  è un parametro positivo. Si stabilisca se  $\mathbf{F}$  è conservativa e, in caso, si determini l'energia potenziale corrispondente.

**SOLUZIONE** Si noti che  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  non è semplicemente connesso quindi la condizione necessaria che le derivate incrociate siano uguali a due a due NON è sufficiente a garantire che la forza sia conservativa sull'intero dominio. Verifichiamo la condizione necessaria:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = a \frac{-x_2^4 - x_1^4 + 6x_1^2 x_2^2}{|\mathbf{x}|^6} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}.$$

Il fatto che le derivate miste siano uguali garantisce che il lavoro lungo qualsiasi curva chiusa *non contenente l'origine* sia nullo. Per stabilire se  $\mathbf{F}$  è conservativa, calcoliamo il lavoro lungo una curva chiusa attorno all'origine, ad es. la circonferenza di raggio  $R$  centrata in  $(0, 0)$ . Parametizziamo tale curva come  $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$ , con  $t = [0, 2\pi)$ , cosicché

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = aR \int_0^{2\pi} \left( \sin^3 t - \cos^2 t \sin t, \cos^3 t - \sin^2 t \cos t \right) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \quad (1)$$

$$= aR \int_0^{2\pi} (\cos^4 t - \sin^4 t) dt = 0 \quad (2)$$

Quindi il lavoro lungo ogni circonferenza centrata nell'origine è nullo. Combinando questo fatto con l'osservazione che il lavoro lungo ogni curva chiusa non contenente l'origine è nullo, si può dimostrare che il lavoro lungo ogni curva chiusa contenente l'origine è anche nullo [*Dimostrazione*: per confrontare il lavoro lungo la circonferenza  $\gamma$  con quello lungo una qualsiasi altra curva chiusa  $\gamma_1$  che circonda l'origine, si consideri il percorso mostrato in Figura 1, che percorre  $\gamma$  in senso antiorario, poi si connette a  $\gamma_1$  lungo uno dei due tratti orizzontali, poi percorre  $\gamma_1$  in senso orario, e infine torna al punto iniziale percorrendo in senso inverso l'altro tratto orizzontale. Tale curva NON CONTIENE l'origine, quindi il lavoro è nullo, per la condizione che le derivate miste siano nulle. D'altra parte, se i due tratti orizzontali sono a distanza  $\epsilon$  l'uno dall'altro, nel limite in cui  $\epsilon \rightarrow 0$ , il lavoro lungo la curva complessiva descritta in figura è uguale al lavoro lungo  $\gamma$  meno il lavoro lungo  $\gamma_1$ . Quindi, visto che il lavoro lungo  $\gamma$  è nullo, altrettanto vale per  $\gamma_1$ .]

In conclusione,  $\mathbf{F}$  è conservativa. Per determinarne il potenziale, cerchiamo  $U(x_1, x_2)$  tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -ax_2 \frac{x_2^2 - x_1^2}{|\mathbf{x}|^4} \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = -ax_1 \frac{x_1^2 - x_2^2}{|\mathbf{x}|^4} \quad (4)$$

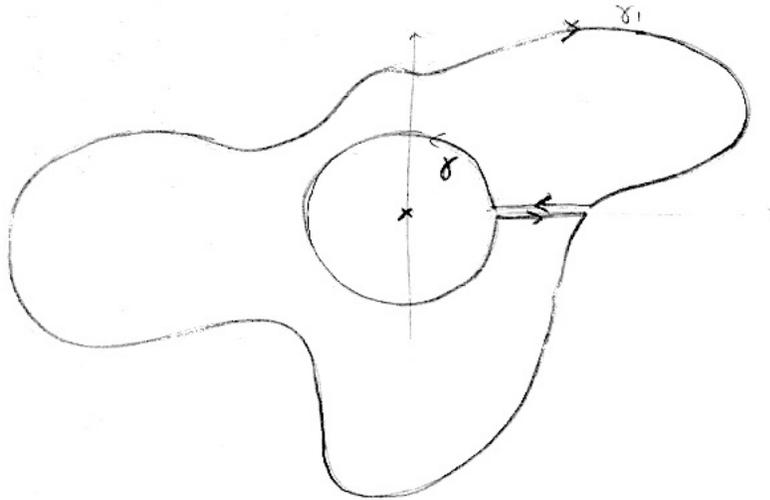


Figure 1

Integrando le due equazioni, procedendo allo stesso modo dell'esercizio precedente, otteniamo:

$$U(x_1, x_2) = -a \frac{x_1 x_2}{|\mathbf{x}|^2},$$

come è facile verificare.

**Esercizio 3** Si consideri il moto di un punto materiale di massa  $m$  in una dimensione, soggetto ad un potenziale  $V(x)$ :

$$m\ddot{x} = -V'(x),$$

con

$$V(x) = V_0 \left[ \left( \frac{x}{\ell} \right)^3 - \frac{x}{\ell} \right],$$

dove  $V_0$  e  $\ell$  sono costanti positive.

- Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
- Nel caso di punti di equilibrio stabile corrispondenti a minimi stretti non degeneri, si derivi l'equazione linearizzata e si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

#### SOLUZIONE

- Cominciamo a calcolare i punti di equilibrio (i punti cioè che annullano la derivata prima del potenziale):

$$V'(x) = V_0 \left[ \frac{3x^2}{\ell^3} - \frac{1}{\ell} \right] = 0 \iff x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\ell^2}{3}}$$

Studiamo ora la stabilità dei punti di equilibrio studiando il segno della derivata seconda di  $V(x)$ :

$$V''(x) = V_0 \frac{6x}{\ell^3} \Rightarrow V''(x_{1,2}) = \pm V_0 \frac{6}{\ell^2} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$\Rightarrow x_1 = \ell/\sqrt{3}$  è un punto di equilibrio stabile per Dirichlet mentre  $x_2 = -\ell/\sqrt{3}$  è di equilibrio instabile perché è un punto di massimo del potenziale.

- L'equazione linearizzata attorno a  $x_1 = \ell/\sqrt{3}$  è:

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_1),$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_1)}{m}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}V_0}{m\ell^2}}$$

rappresenta la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

**Esercizio 4** Si consideri il moto di un punto materiale di massa  $m$  in una dimensione, soggetto ad un potenziale  $V(x)$ :

$$m\ddot{x} = -V'(x),$$

con

$$V(x) = V_0 \left(\frac{\ell}{x}\right)^6 - 2V_0 \left(\frac{\ell}{x}\right)^4 + \frac{L^2}{2mx^2},$$

dove  $V_0, \ell$  sono costanti positive, e  $L$  è un parametro.

- Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità, al variare di  $L > 0$  (si supponga  $x > 0$ ).
- Nel caso di punti di equilibrio stabile corrispondenti a minimi stretti non degeneri, si derivi l'equazione linearizzata e si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

**SOLUZIONE** Restringiamoci al caso  $x > 0$ : lo studio del grafico di  $V$  e dei punti di equilibrio per  $x < 0$  si ottiene per parità ( $V$  è una funzione pari di  $x$ , definita in  $x \neq 0$ ).

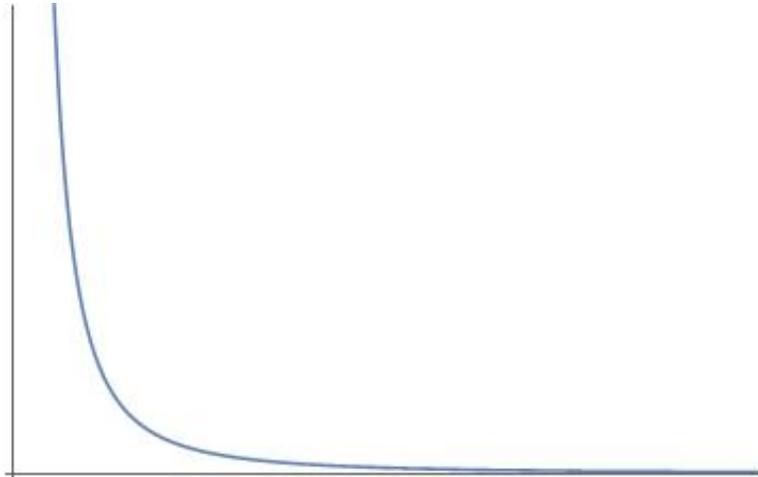
- Cominciamo a calcolare i punti di equilibrio (i punti cioè che annullano la derivata prima del potenziale):

$$V'(x) = V_0 \frac{-6\ell^6}{x^7} + 8V_0 \frac{\ell^4}{x^5} - \frac{L^2}{mx^3} = -\frac{6V_0\ell^6}{x^7} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{L^2}{6m\ell^2 V_0} \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 \right]$$

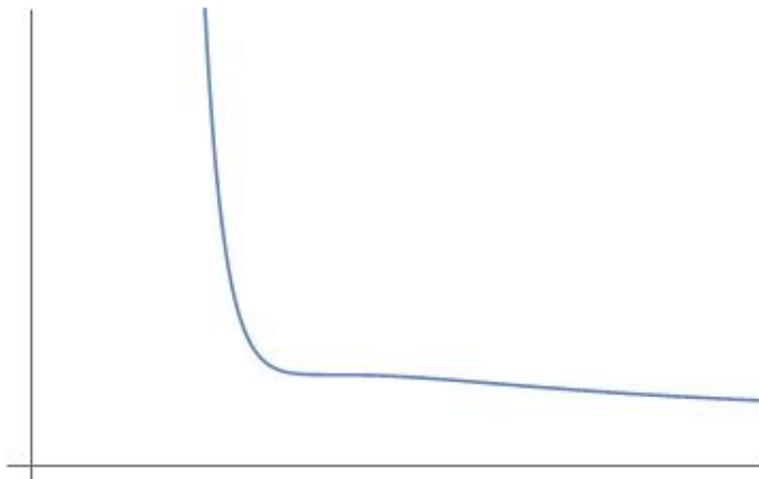
le cui radici con determinazione positiva sono:

$$x_{1,2} = \ell \sqrt{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{L^2}{6m\ell^2 V_0}}}.$$

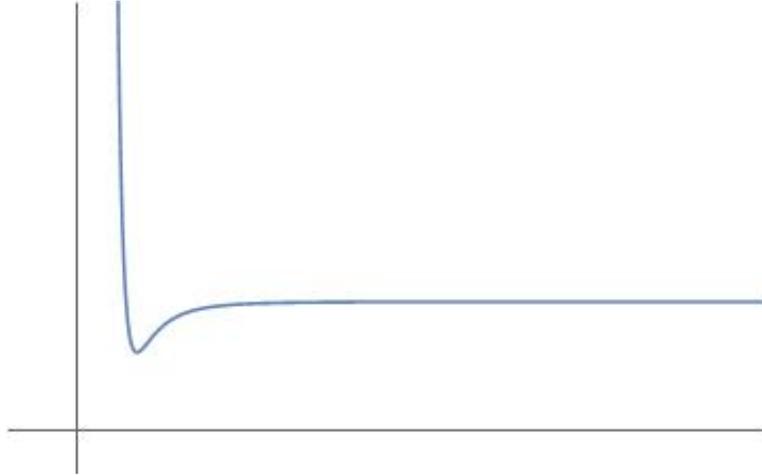
1. **CASO**  $L^2 > \frac{8}{3}V_0\ell^2m$  Ci sono solo radici complesse  $\implies$  non si hanno punti di equilibrio. In questo caso il potenziale ha il seguente grafico:



2. **CASO**  $L^2 = \frac{8}{3}V_0\ell^2m$  C'è solo una radice  $x_0 = \sqrt{3\ell^2}$  che è un punto di sella degenere (i.e., la derivata seconda è nulla, come è facile verificare). In tal caso il criterio di instabilità studiato a lezione non si applica. Vedremo tuttavia, studiando la soluzione per quadrature dei moti conservativi unidimensionali, che i punti di sella sono sempre instabili. In questo caso il potenziale ha il seguente grafico:



3. CASO  $L^2 < \frac{8}{3}V_0\ell^2m$  Ci sono due radici reali e non è difficile mostrare che  $x_1$  è un punto di massimo del potenziale mentre  $x_2$  è un punto di minimo; pertanto  $x_1$  è un punto di equilibrio instabile e  $x_2$  è un punto di equilibrio stabile per Dirichlet. In questo caso il grafico del potenziale è:



- L'equazione linearizzata attorno a  $x_2 = \ell\sqrt{\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{L^2}{6m\ell^2V_0}}}$  è:

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_2),$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_2)}{m}}$$

rappresenta la frequenza angolare delle piccole oscillazioni (il calcolo esplicito di  $\omega$  in termini dei parametri  $V_0, \ell, m, L$  è lasciato al lettore).

**Esercizio 5** Si consideri il moto di un punto materiale di massa  $m$  in due dimensioni, soggetto ad un potenziale  $V(\mathbf{x})$ :

$$V(\mathbf{x}) = \frac{V_0}{4}[(|\mathbf{x}|/\ell)^2 - 1]^2 - Ex_1$$

dove  $V_0, \ell$  e  $E$  sono costanti positive. Si supponga inoltre che  $0 < E < \frac{2V_0}{3\sqrt{3}\ell}$ .

- Trovare i punti di equilibrio del sistema (in termini delle tre radici di un'equazione cubica) e studiarne la stabilità.
- Nel caso di punti di equilibrio stabile corrispondenti a minimi stretti non degeneri, si derivi l'equazione linearizzata e si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

## SOLUZIONE

- Cominciamo a calcolare i punti di equilibrio (i punti cioè che annullano il gradiente del potenziale):

$$\nabla V(x_1, x_2) = \left( V_0 \frac{x_1}{\ell^2} \left[ \frac{x_1^2 + x_2^2}{\ell^2} - 1 \right] - E, V_0 \frac{x_2}{\ell^2} \left[ \frac{x_1^2 + x_2^2}{\ell^2} - 1 \right] \right)$$

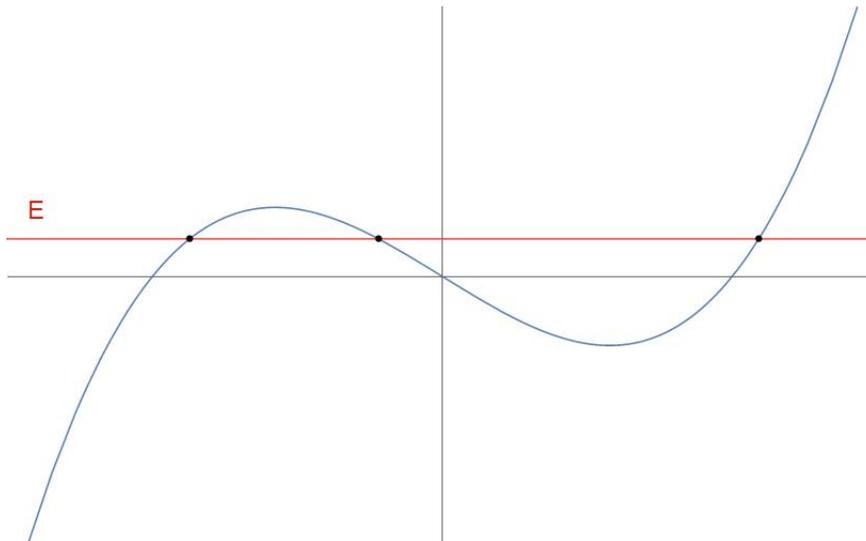
Pertanto dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{V_0}{\ell^2} x_1 \left[ \frac{x_1^2 + x_2^2}{\ell^2} - 1 \right] - E = 0 \\ \frac{V_0}{\ell^2} x_2 \left[ \frac{x_1^2 + x_2^2}{\ell^2} - 1 \right] = 0 \end{cases}$$

Se provo a risolvere la seconda equazione imponendo che il termini in parentesi quadre sia nullo, vedo immediatamente che la prima equazione non è soddisfatta, poiché  $E \neq 0$ . Affinché le due equazioni siano soddisfatte, dobbiamo quindi fissare  $x_2 = 0$  che, sostituita nella prima, ci dà:

$$\left( \frac{x_1}{\ell} \right)^3 - \frac{x_1}{\ell} = \frac{E\ell}{V_0}.$$

Ciò equivale a trovare i punti di intersezione tra la funzione  $\left( \frac{x_1}{\ell} \right)^3 - \frac{x_1}{\ell}$  e la retta orizzontale  $E\ell/V_0$ . Notiamo che la funzione  $\left( \frac{x_1}{\ell} \right)^3 - \frac{x_1}{\ell}$  ha un punto di massimo in  $\bar{x} = -\ell/\sqrt{3}$  e un punto di minimo  $\underline{x} = \ell/\sqrt{3}$ . In  $\bar{x}$  la funzione vale  $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ : pertanto, osservando il seguente grafico:



dove la retta orizzontale rossa ha altezza  $El/V_0$ , e ricordando che  $0 < El/V_0 < 2/(3\sqrt{3})$ , vediamo che esistono 3 soluzioni reali dell'equazione:

$$\begin{aligned} -\ell < x_{\bullet} < -\ell/\sqrt{3}, \\ -\ell/\sqrt{3} < x_{\circ} < 0, \\ x_{\star} > \ell. \end{aligned}$$

I punti di equilibrio quindi sono:  $(x_{\bullet}, 0)$ ,  $(x_{\circ}, 0)$  e  $(x_{\star}, 0)$ .

Calcoliamo ora la matrice hessiana di  $V(x_1, x_2)$ :

$$\mathcal{H}_0(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} V_0 \left[ \frac{3x_1^2 + x_2^2}{\ell^4} - \frac{1}{\ell^2} \right] & V_0 \frac{2x_2x_1}{\ell^4} \\ V_0 \frac{2x_2x_1}{\ell^4} & V_0 \left[ \frac{x_1^2 + 3x_2^2}{\ell^4} - \frac{1}{\ell^2} \right] \end{pmatrix}.$$

Se calcolata sui punti di equilibrio, l'Hessiana è diagonale, con autovalori uguali, rispettivamente, a:

1.  $V_0 \left[ \frac{3x_{\bullet}^2}{\ell^4} - \frac{1}{\ell^2} \right] > 0$  e  $V_0 \left[ \frac{x_{\bullet}^2}{\ell^4} - \frac{1}{\ell^2} \right] < 0$
2.  $V_0 \left[ \frac{3x_{\circ}^2}{\ell^4} - \frac{1}{\ell^2} \right] < 0$  e  $V_0 \left[ \frac{x_{\circ}^2}{\ell^4} - \frac{1}{\ell^2} \right] < 0$
3.  $V_0 \left[ \frac{3x_{\star}^2}{\ell^4} - \frac{1}{\ell^2} \right] > 0$  e  $V_0 \left[ \frac{x_{\star}^2}{\ell^4} - \frac{1}{\ell^2} \right] > 0$

$\Rightarrow (x_{\bullet}, 0)$  e  $(x_{\circ}, 0)$  sono di equilibrio instabile, mentre  $(x_{\star}, 0)$  è di equilibrio stabile.

- L'equazione linearizzata attorno a  $(x_{\star}, 0)$  è:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -\frac{V_0}{\ell^2} \left[ 3\left(\frac{x_{\star}}{\ell}\right)^2 - 1 \right] (x_1 - x_{\star}) \\ m\ddot{x}_2 = -\frac{V_0}{\ell^2} \left[ \left(\frac{x_{\star}}{\ell}\right)^2 - 1 \right] x_2 \end{cases}$$

e quindi le frequenze angolari di oscillazione propria sono:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{V_0}{\ell^2} \left[ 3\left(\frac{x_{\star}}{\ell}\right)^2 - 1 \right]}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{V_0}{\ell^2} \left[ \left(\frac{x_{\star}}{\ell}\right)^2 - 1 \right]}.$$

**Esercizio 6** Si consideri il moto di un punto materiale di massa  $m$  in due dimensioni, di coordinate  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , soggetto ad un potenziale  $V(\mathbf{x})$ :

$$V(\mathbf{x}) = A(x_1 + x_2)^3 + B|\mathbf{x}|^2 + C(x_1 - x_2),$$

dove  $A, B, C$  sono costanti positive.

- Trovare i punti di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.
- Nel caso di punti di equilibrio stabile corrispondenti a minimi stretti non degeneri, si derivi l'equazione linearizzata e si calcoli la frequenza angolare delle piccole oscillazioni.

**SOLUZIONE**

- Cominciamo a calcolare i punti di equilibrio (i punti cioè che annullano il gradiente del potenziale):

$$\nabla V(x_1, x_2) = (3A(x_1 + x_2)^2 + 2Bx_1 + C, 3A(x_1 + x_2)^2 + 2Bx_2 - C)$$

Pertanto dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3A(x_1 + x_2)^2 + 2Bx_1 + C = 0 \\ 3A(x_1 + x_2)^2 + 2Bx_2 - C = 0 \end{cases}$$

I punti di equilibrio per tale potenziale sono:  $(-\frac{C}{2B}, \frac{C}{2B})$  e  $(-\frac{C}{2B} - \frac{B}{6A}, \frac{C}{2B} - \frac{B}{6A})$ .  
Calcoliamo ora la matrice hessiana di  $V(x_1, x_2)$ :

$$\mathcal{H}_0(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6A(x_1 + x_2) + 2B & 6A(x_1 + x_2) \\ 6A(x_1 + x_2) & 6A(x_1 + x_2) + 2B \end{pmatrix}$$

da cui:

1.

$$\mathcal{H}_0(-\frac{C}{2B}, \frac{C}{2B}) = \begin{pmatrix} 2B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, con due autovalori coincidenti uguali a  $+2B$ ;

2.

$$\mathcal{H}_0(-\frac{C}{2B} - \frac{B}{6A}, \frac{C}{2B} - \frac{B}{6A}) = \begin{pmatrix} 0 & -2B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$$

che corrisponde a un punto di sella non degenera: infatti tale matrice ammette un autovalore uguale a  $+2B$  e uno uguale a  $-2B$ .

Quindi  $(-\frac{C}{2B}, \frac{C}{2B})$  è un punto di equilibrio di stabile mentre  $(-\frac{C}{2B} - \frac{B}{6A}, \frac{C}{2B} - \frac{B}{6A})$  è un punto di equilibrio di instabile.

- Il sistema linearizzato attorno a  $(-\frac{C}{2B}, \frac{C}{2B})$  è

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2B(x + \frac{C}{2B}) \\ m\ddot{x}_2 = -2B(x - \frac{C}{2B}) \end{cases}$$

che ha un'unica frequenza di oscillazione propria (con molteplicità doppia), pari a  $\omega = \sqrt{2B}$ .