Corsi di laurea in Matematica e Fisica - Anno Accademico 2016/17

FM210 / MA

Prima Prova di Esonero [10-4-2017]

1. **(14 punti).** Un punto materiale di massa m si muove in una dimensione sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale

$$U(x) = A\frac{x}{x^2+\ell^2},$$

dove A e ℓ sono parametri positivi.

(a) Si scriva l'equazione del moto

(b) Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione

(c) Si disegni il grafico del potenziale. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità. Per i punti di equilibrio stabile, si scriva l'equazione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio e si calcoli la frequenza di oscillazione corrispondente.

(d) Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi $(x, \dot{x})$ e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare della grandezza conservata identificata sopra. Nel caso di moti periodici non banali, se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

(e) Nel caso di moti aperti, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o no (e se, quindi, la soluzione è globale nel tempo o no).

Soluzione.

(a) L'equazione del moto è:

$$m\ddot{x} = -U'(x) = A\frac{x^2-\ell^2}{(x^2+\ell^2)^2}.$$

(b) Un integrale primo del moto è l'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + A\frac{x}{x^2+\ell^2},$$

la cui conservazione si verifica facilmente considerando la derivata di E rispetto al tempo:

$$\dot{E} = \dot{x}\Big[m\ddot{x} + A\frac{\ell^2-x^2}{(x^2+\ell^2)^2}\Big],$$

che è zero, poiché l'espressione in parentesi quadra è nulla per l'equazione del moto.

(c) Si notino innanzitutto le seguenti proprietà di $U(x)$: (i) $U(x)$ è dispari; (ii) $U(x)$ è positiva per $x > 0$; (iii) $\lim_{x\to\pm\infty} U(x) = 0$. Inoltre $U'(x) = A\frac{\ell^2-x^2}{(x^2+\ell^2)^2}$ si annulla in $x = \pm\ell$. Il grafico risultante è mostrato in Figura 1:

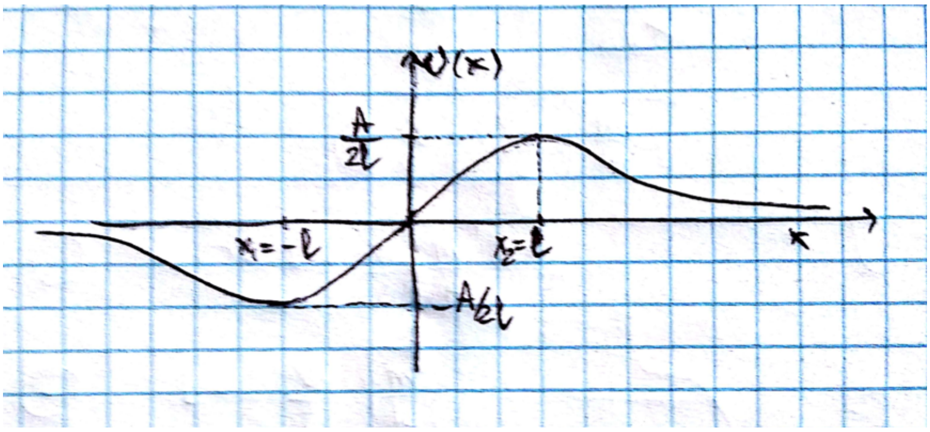

Figura 1: Grafico del potenziale $U(x)$.

I punti di equilibrio sono $x_1 = -\ell$ (stabile) e $x_2 = \ell$ (stabile).

L'equazione delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile x_1 è

$$m\ddot{x} = -U''(x_1)\,(x - x_1),$$

dove

$$U''(x_1) = \frac{A}{(x_1^2 + \ell^2)^3}(2x_1^3 - 6x_1\ell^2) = \frac{A}{2\ell^3}.$$

La frequenza angolare delle piccole oscillazioni attorno a x_1 è quindi

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{U''(x_1)}{m}} = \sqrt{\frac{A}{2m\ell^3}}.$$

(d) Le curve di livello associate ad U, di energia E, hanno equazione:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

Il loro grafico qualitativo, al variare di E, è mostrato in Figura 2.

In corrispondenza delle diverse traiettorie nel piano delle fasi mostrate in Fig.2, il sistema svolge moti della seguente natura qualitativa:

- moti 'banali' sui due punti di equilibrio ($x(t) \equiv x_1$ e $x(t) \equiv x_2$),
- moti periodici non banali che consistono in oscillazioni attorno a x_1 (se $-A/(2\ell) < E < 0$),
- moti illimitati che tendono a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro (se $0 \leq E < A/(2\ell)$ e $x(0) < x_2$: nel caso $E = 0$ il punto raggiunge $-\infty$ con velocità nulla, mentre nei casi $0 < E < A/(2\ell)$ lo raggiunge con velocità positiva),
- moti illimitati che tendono a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro (se $0 < E < A/(2\ell)$ e $x(0) > x_2$; si noti che il punto raggiunge $+\infty$ sempre con velocità positiva),

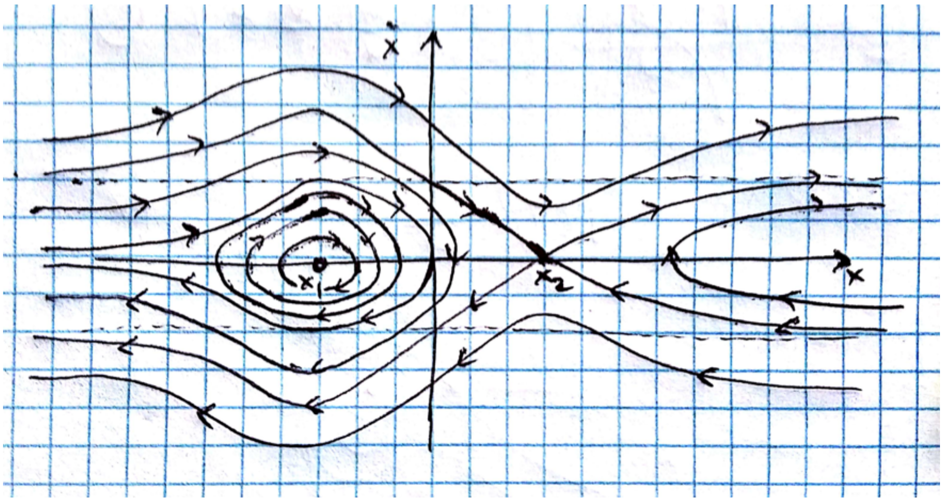

Figura 2: Curve di livello associate al potenziale $U(x)$, al variare dell'energia E.

- moti illimitati critici, sulla separatrice, che tendono a x_2 nel passato e a $-\infty$ nel futuro, o viceversa (se $E = A/(2\ell)$ e $x(0) < x_2$),
- moti illimitati critici, sulla separatrice, che tendono a x_2 nel passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa (se $E = A/(2\ell)$ e $x(0) > x_2$),
- moti illimitati, che tendono a $+\infty$ nel futuro e a $-\infty$ nel passato, o viceversa (se $E > A/(2\ell)$).

Nei casi in cui il moto sia periodico non banale (il secondo caso nella lista sopra), il periodo T può essere calcolato in termini di un integrale definito:

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A\frac{x}{x^2+\ell^2})}},$$

dove $x_\pm$ sono i punti di inversione, definiti come le due radici dell'equazione $E = U(x)$, nel caso in cui $-A/(2\ell) < E < 0$.

(e) Si consideri un moto aperto che, ad esempio, tende a $+\infty$ nel futuro (una discussione analoga si applica ai casi in cui il moto tende a $+\infty$ nel passato, o a $-\infty$ nel futuro, o a $-\infty$ nel passato). Se assumiamo, senza perdita di generalità, che $x(0)$ sia la posizione del punto al tempo 0 e che $\dot{x} > 0$, $\forall t > 0$, allora il tempo per raggiungere $+\infty$ a partire da $x(0)$ è

$$T_\infty = \int_{x(0)}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A\frac{x}{x^2+\ell^2})}}.$$

Si noti che la funzione integranda, per $x \to +\infty$ tende a una costante, $\sqrt{m/(2E)}$ che ovviamente non è integrabile all'infinito: quindi il tempo di fuga all'infinito è infinito. Di conseguenza, tutte le soluzioni, incluse quelle corrispondenti a moti aperti, sono globali nel tempo, ovvero sono definite per tutti i t reali.

2. **(16 punti).** Il moto di una particella di massa m in $\mathbb{R}^3$ è descritto dalla seguente equazione del moto associata a una forza centrale:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{r} - V_0\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2},$$

dove k e V_0 sono parametri positivi.

(a) Si calcoli il potenziale centrale corrispondente.

(b) Supponendo il momento angolare diverso da zero, si descriva il sistema in coordinate polari sul piano ortogonale a $\mathbf{L}$: si scriva l'equazione del moto per la variabile radiale e si determini il potenziale efficace corrispondente.

(c) Si disegni il grafico del potenziale efficace e delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare dell'energia meccanica E e del modulo L del momento angolare.

(d) Si determinino i punti di equilibrio del moto radiale e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare di E e di L.

(e) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (eventualmente in termini di un integrale definito).

(f) Nel caso di moti aperti, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o no (e se, quindi, la soluzione è globale nel tempo o no).

Soluzione.

(a) L'equazione per il potenziale centrale associato alla forza assegnata è:

$$V'(\rho) = -k\rho + \frac{V_0}{\rho},$$

da cui

$$V(\rho) = -\frac{1}{2}k\rho^2 + V_0\log\frac{\rho}{r_0},$$

dove r_0 è una costante arbitraria positiva (con le dimensioni fisiche di lunghezza).

(b) Passando a coordinate polari ρ e θ sul piano $x'y'$ ortogonale all'asse $\hat{\mathbf{L}}$, le equazioni del moto prendono la forma:

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho), \\ \dot{\theta} = L/(m\rho^2), \end{cases}$$

dove il potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$ è definito come segue:

$$V_{eff}(\rho) = -\frac{1}{2}k\rho^2 + V_0\log\frac{\rho}{r_0} + \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

(c) Per disegnare il grafico del potenziale efficace, notiamo innanzitutto che $\lim_{\rho\to 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty$, mentre $\lim_{\rho\to+\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty$. Si ha poi:

$$\begin{aligned} V'_{eff}(\rho) &= -k\rho + \frac{V_0}{\rho} - \frac{L^2}{m\rho^3} \\ &= -\frac{k}{\rho^3}\Big[\rho^4 - \frac{V_0}{k}\rho^2 + \frac{L^2}{mk}\Big], \end{aligned}$$

le cui radici positive sono della forma

$$\rho = \sqrt{\frac{V_0}{2k} \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{4k^2} - \frac{L^2}{mk}}}.$$

Ovviamente, affinché tale espressione sia ben definita, l'espressione dentro la seconda radice deve essere nonnegativa. A seconda dei valori di L, si possono quindi distinguere i seguenti casi:

- $0 < L < \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$: in tal caso V_{eff} ha due punti stazionari distinti,

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{V_0}{2k} - \sqrt{\frac{V_0^2}{4k^2} - \frac{L^2}{mk}}} \quad \text{e} \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{V_0}{2k} + \sqrt{\frac{V_0^2}{4k^2} - \frac{L^2}{mk}}},$$

  il primo punto di equilibrio stabile del moto radiale, e il secondo punto di equilibrio instabile.
- $L = \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$: in tal caso V_{eff} ha due punti stazionari coincidenti in $\rho_0 = \sqrt{\frac{V_0}{2k}}$, che è punto di equilibrio instabile del moto radiale.
- $L > \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$: in tal caso V_{eff} non ha punti stazionari.

Il grafico qualitativo di $V_{eff}(\rho)$ nei tre casi è mostrato in Fig.3.

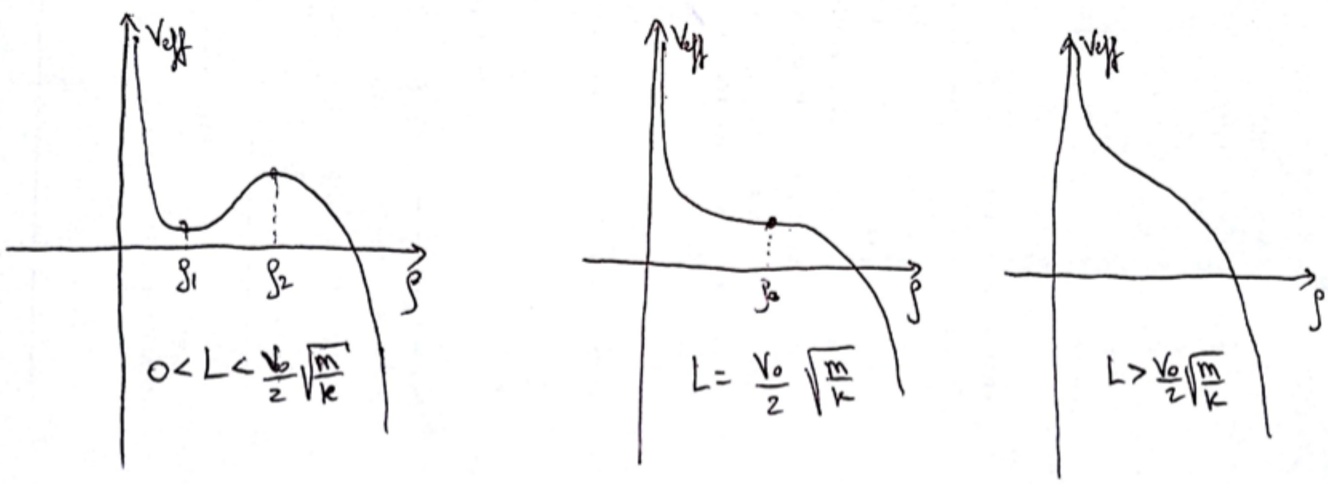

Figura 3: Grafico del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$, al variare del momento angolare L.

Il grafico delle curve di livello corrispondenti è mostrato in Fig.4.

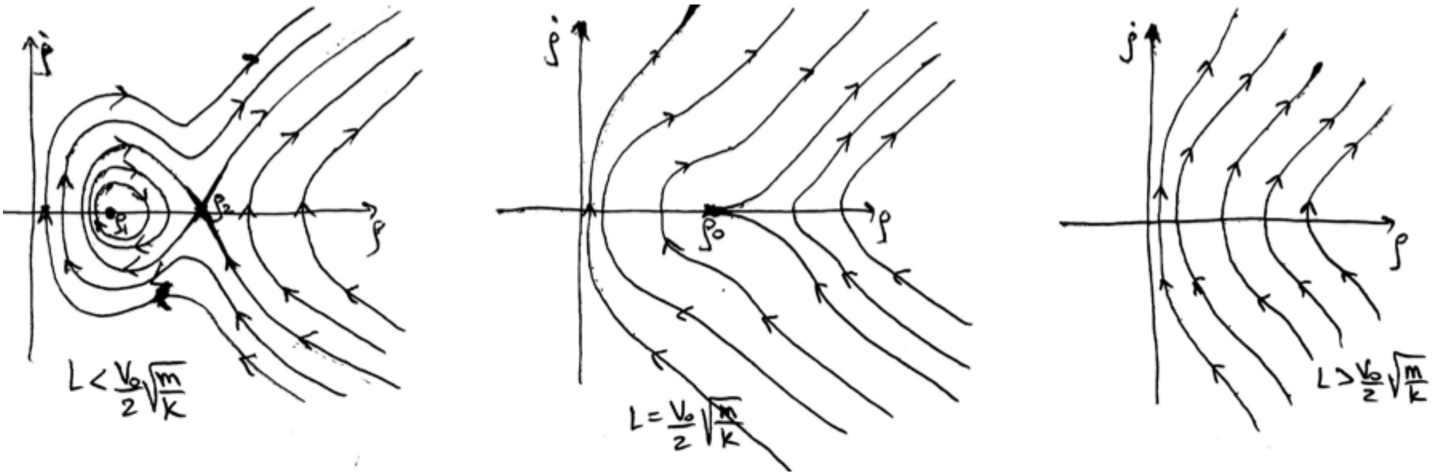

Figura 4: Curve di livello per il moto radiale associate al potenziale $V_{eff}(\rho)$, al variare dell'energia E e del momento angolare L.

(d) Come già discusso sopra, il sistema ammette punti di equilibrio se e solo se $L \leq \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$: se $L < \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ il sistema ammette due punti di equilibrio, ρ_1, stabile, e ρ_2, instabile, la cui espressione analitica è riportata sopra; se $L = \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$, il sistema ammette un unico punto di equilibrio, $\rho_0 = \sqrt{V_0/(2k)}$, instabile.

Al variare di E e di L, il sistema svolge moti della seguente natura qualitativa:

i. Caso $L < \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$. Il sistema ammette:
- due moti 'banali' sui punti di equilibrio: $\rho(t) \equiv \rho_1$ e $\rho(t) \equiv \rho_2$,
- moti periodici non banali che consistono in oscillazioni attorno a ρ_1 (se $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$),
- moti limitati a-periodici, sulla separatrice, che tendono a ρ_2 sia nel passato che nel futuro (se $E = V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$),
- moti illimitati critici, sulla separatrice, che tendono a ρ_2 nel passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa se $E = V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) > \rho_2$),
- moti illimitati non critici, che tendono a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro, in tutti gli altri casi.

ii. Caso $L = \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$. Il sistema ammette:
- un moto 'banale' sul punto di equilibrio: $\rho(t) \equiv \rho_0$,
- moti illimitati critici, sulla separatrice, che tendono a ρ_0 nel passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa se $E = V_{eff}(\rho_0)$ e $\rho(0) > \rho_0$),
- moti illimitati non critici, che tendono a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro, in tutti gli altri casi.

iii. Caso $L > \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$. Il sistema ammette solamente:
   - moti illimitati non critici, che tendono a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro.

(e) Il moto complessivo è periodico nei seguenti casi:

- se il moto radiale è 'banale', i.e., della forma $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$, con ρ_{eq} uno dei punti di equilibrio. In tal caso il moto complessivo è circolare uniforme, di periodo

$$T = \frac{2\pi m \rho_{eq}^2}{L}.$$

- nei casi in cui il moto radiale è periodico non banale di periodo T_0 (i.e., nel caso in cui $0 < L < \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$, $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$), e il secondo periodo T_1 del moto angolare è in rapporto razionale con T_0. Tale caso si verifica per le scelte di E, L e dei dati iniziali per cui, oltre a verificarsi $0 < L < \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$, $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$, si ha:

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\pi}\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E + \frac{1}{2}k\rho^2 - V_0 \log\frac{\rho}{r_0} - \frac{L^2}{2mV_0\rho^2})}} = \frac{p}{q},$$

dove $\rho_\pm$ sono i due punti di inversioni del moto radiale (i.e., le due radici di $E = V_{eff}(\rho)$ tali che $\rho_- < \rho_1 < \rho_+ < \rho_2$), mentre p e q sono due numeri interi, primi tra loro. In tal caso, il moto complessivo ha periodo $T = qT_0 = pT_1$.

(f) Si consideri un moto aperto che, ad esempio, tende a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro (una discussione analoga si applica ai moti illimitati critici sulla separatrice, che tendono al punto di equilibrio instabile nel passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa). Se assumiamo, senza perdita di generalità, che $\rho(0)$ sia il valore della distanza dal centro al tempo 0 e che $\dot\rho > 0$, $\forall t > 0$, allora il tempo per raggiungere $+\infty$ a partire da $\rho(0)$ è

$$T_\infty = \int_{\rho(0)}^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E + \frac{1}{2}k\rho^2 - V_0 \log\frac{\rho}{r_0} - \frac{L^2}{2mV_0\rho^2})}}.$$

Si noti che la funzione integranda, per $\rho \to +\infty$, si comporta asintoticamente come $\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{1}{\rho}$, che non è integrabile all'infinito: quindi il tempo di fuga all'infinito è infinito. Di conseguenza, tutte le soluzioni, incluse quelle corrispondenti a moti aperti, sono globali nel tempo, ovvero sono definite per tutti i t reali.