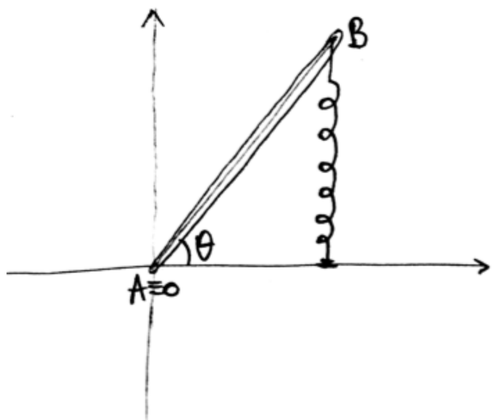
FM210 / MA - Soluzioni della seconda prova di esonero (31-5-2017)

<u>Esercizio 1.</u> Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza ℓ e massa M è vincolata a muoversi su un piano verticale Π, con estremo A fissato nel punto O. L'asta è soggetta alla forza peso. Inoltre, sull'estremo libero B agisce una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, che connette B con l'asse orizzontale passante per O, in modo tale da lavorare sempre in posizione verticale.



1. Usando l'angolo θ mostrato in figura come coordinata generalizzata, si scriva la Lagrangiana del sistema e l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente. [Si ricordi che il momento d'inerzia I di un'asta omogenea di massa M e lunghezza ℓ, attorno a un asse perpendicolare all'asta e passante per il baricentro, è uguale a $I = \frac{1}{12}M\ell^2$.]

2. Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.

3. Supponendo $k > \frac{Mg}{2\ell}$, si identifichino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.

4. Nel caso $k > \frac{Mg}{2\ell}$, si risolva l'equazione del moto per quadrature e si discuta qualitativamente la natura dei moti (in particolare, si disegnino le curve di livello sul piano delle fasi $(\theta, \dot\theta)$ per i diversi valori assunti dall'integrale primo identificato sopra).

SOLUZIONE.

1. La Lagrangiana è uguale all'energia cinetica del sistema meno la sua energia potenziale, entrambe espresse in termini delle variabili $(\theta, \dot{\theta})$.

   L'energia cinetica è puramente di rotazione, attorno al punto fisso O, ed è quindi della forma $\frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2$, con I_O il momento d'inerzia attorno a un asse perpendicolare all'asta e passante per O. Per il teorema di Huygens-Steiner, tale momento d'inerzia è uguale al momento d'inerzia I_G attorno a un asse passante per il baricentro, più Md^2, con d la distanza tra il baricentro e il punto fisso. Nel nostro caso $I_G = \frac{M\ell^2}{12}$ e $d = \ell/2$, quindi l'energia cinetica del sistema è

   $$T = \frac{1}{2}\Big(\frac{M\ell^2}{12} + \frac{M\ell^2}{4}\Big)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} M\ell^2 \dot{\theta}^2.$$

   L'energia potenziale è la somma dell'energia gravitazionale, $V_g = Mg\frac{\ell}{2}\sin\theta$, più l'energia elastica, $V_e = \frac{1}{2} k\ell^2 \sin^2\theta$. In conclusione,

   $$\mathcal{L} = \frac{1}{6} M\ell^2 \dot{\theta}^2 - Mg\frac{\ell}{2}\sin\theta - \frac{1}{2} k\ell^2 \sin^2\theta.$$

   L'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente è

   $$\frac{1}{3} M\ell^2 \ddot{\theta} = -Mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - k\ell^2 \sin\theta\, \cos\theta,$$

   o, equivalentemente,

   $$\frac{1}{3} M\ell^2 \ddot{\theta} = -k\ell^2 \cos\theta\big(\sin\theta + \alpha\big), \tag{1}$$

   dove $\alpha := \frac{Mg}{2k\ell}$.

2. Il sistema ammette l'energia meccanica come grandezza conservata:

   $$E = \frac{1}{6} M\ell^2 \dot{\theta}^2 + k\ell^2 \Big(\frac{\sin^2\theta}{2} + \alpha\sin\theta\Big).$$

   Per verificare che è effettivamente conservata, deriviamo l'espressione rispetto al tempo e usiamo l'equazione di Eulero-Lagrange. Troviamo:

   $$\dot{E} = \frac{1}{3} M\ell^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + k\ell^2 \dot{\theta}\cos\theta(\sin\theta + \alpha),$$

   e usando la (1) si vede immediatamente che il membro di destra è nullo, come desiderato.

3. Imponendo che $\theta(t) \equiv \theta^*$ risolva l'equazione di Eulero-Lagrange, ricavo l'equazione per θ^* (punto di equilibrio):

$$\cos\theta^* \big(\sin\theta^* + \alpha \big) = 0.$$

Si noti che, nel caso in cui $k > \frac{Mg}{2\ell}$, il parametro α è minore di 1: $0 < \alpha < 1$. I punti di equilibrio sono quindi:

$$\theta^* = \pm\pi/2, -\arcsin\alpha, -\pi + \arcsin\alpha.$$

Per studiarne la stabilità, calcoliamo la derivata seconda del potenziale $V(\theta) = k\ell^2(\frac{\sin^2\theta}{2} + \alpha\sin\theta)$:

$$V''(\theta) = -k\ell^2 \sin\theta(\sin\theta + \alpha) + k\ell^2\cos^2\theta,$$

da cui:

$$V''(\pm\frac{\pi}{2}) = -k\ell^2(1 \pm \alpha) < 0,$$
$$V''(-\arcsin\alpha) = V''(-\pi + \arcsin\alpha) = k\ell^2(1 - \alpha^2) > 0.$$

Quindi $\pm\pi/2$ sono instabili, mentre $-\arcsin\alpha$ e $-\pi + \arcsin\alpha$ sono stabili.

4. Il grafico qualitativo del potenziale $V(\theta)$ nel periodo $[-\pi, \pi]$ è mostrato in Fig.1.

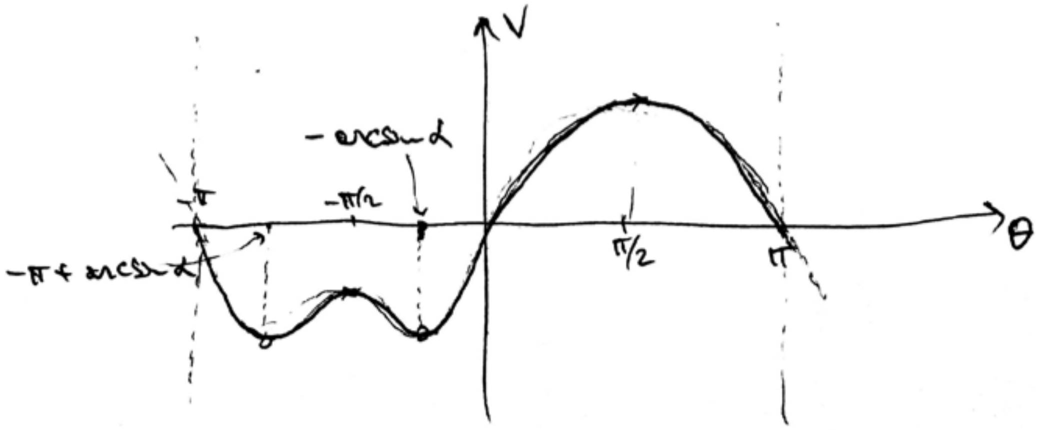


Figura 1: Grafico di $V(\theta)$

Il grafico delle curve di livello corrispondenti sul piano delle fasi $(\theta, \dot{\theta})$ è mostrato in Fig.2.

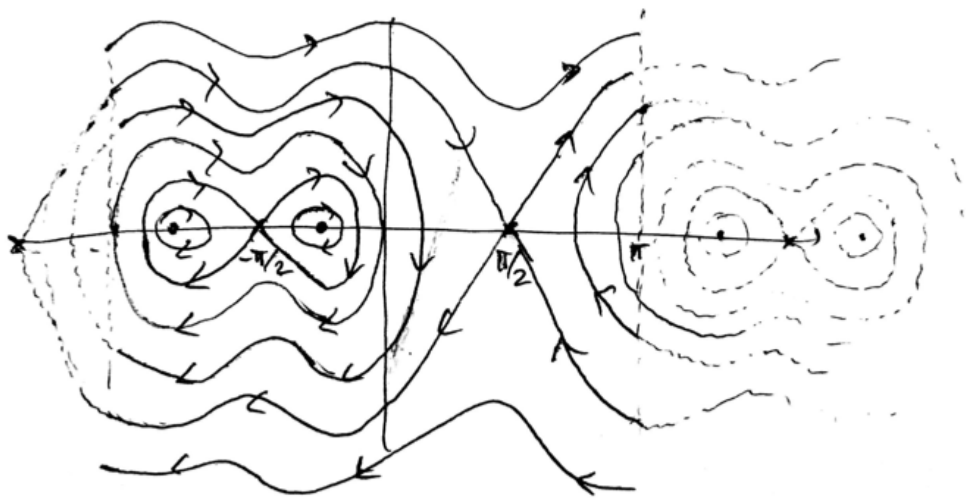


Figura 2: Curve di livello $\pm\sqrt{\frac{6}{M\ell^2}(E - V(\theta))}$, al variare di E

I moti possibili del sistema sono i seguenti:

- 'banali' sui punti di equilibrio: $\theta(t) \equiv \pi/2$, o $\theta(t) \equiv -\pi/2$, o $\theta(t) \equiv -\arcsin\alpha$, o $\theta(t) \equiv -\pi + \arcsin\alpha$;
- periodici, che consistono in oscillazioni attorno a uno dei due punti di equilibrio stabile, se $V(-\arcsin\alpha) < E < V(-\pi/2)$;
- a-periodici, che tendono a $-\pi/2$ sia nel passato che nel futuro, se $E = V(-\pi/2)$ e $\theta(0) \neq -\pi/2$;
- periodici, che consistono in oscillazioni attorno a entrambi i punti di equilibrio stabile, se $V(-\pi/2) < E < V(\pi/2)$;
- a-periodici, che tendono a $+\pi/2$ sia nel passato che nel futuro, se $E = V(\pi/2)$ e $\theta(0) \neq \pi/2$;
- periodici 'aperti', che consistono in oscillazioni complete dell'asta attorno al punto fisso, sempre in senso orario, o sempre in senso anti-orario, se $E > V(\pi/2)$.

La soluzione per quadrature alle equazioni del moto, in un intervallo di tempo in cui $\dot{\theta} > 0$, si ottiene invertendo la seguente funzione integrale:

$$t - t_0 = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{6}{M\ell^2}(E - V(\theta))}}.$$

Analogamente, la soluzione per quadrature in un intervallo di tempo in cui $\dot{\theta} < 0$ si ottiene invertendo

$$t - t_1 = -\int_{\theta(t_1)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{6}{M\ell^2}(E - V(\theta))}}.$$

<u>Esercizio 2.</u> Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{1}{2}e^{qp^2}$$

1. Si scrivano le equazioni di Hamilton.
2. Si determini la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $S(q,P) = 2\sqrt{2q\log P}$ e se ne calcoli l'inversa. Quali sono i domini di definizione delle trasformazioni canoniche diretta e inversa cosí determinate?
3. Si verifichi esplicitamente che la trasformazione canonica identificata al punto precedente conserva le parentesi di Poisson fondamentali.
4. Si usi la trasformazione canonica identificata sopra per integrare le equazioni del moto con dato iniziale $(q(0), p(0)) = (1, 1)$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni di Hamilton originali.

SOLUZIONE.

1. Le equazioni di Hamilton del sistema sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = qpe^{qp^2} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{p^2}{2}e^{qp^2} \end{cases}$$

2. La trasformazione associata alla funzione generatrice assegnata è:
$$\begin{cases} p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{\frac{2\log P}{q}} \\ Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{1}{P}\sqrt{\frac{2q}{\log P}} \end{cases}$$
che si può invertire nella forma:
$$\begin{cases} Q = \frac{2}{p}e^{-qp^2/2} \\ P = e^{qp^2/2} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} q = \frac{1}{2}Q^2P^2\log P \\ p = \frac{2}{QP} \end{cases}$$
che è ben definita come trasformazione (invertibile) da $(q,p) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ a $(Q,P) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

3. Verifico che la trasformazione $Q = \frac{2}{p}e^{-qp^2/2}$, $P = e^{qp^2/2}$ soddisfi $\{Q,P\} = 1$:
$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = -qp^2 + \Big(\frac{2}{p^2} + 2q\Big)\frac{p^2}{2},$$
che è uguale a 1, come desiderato.

4. L'Hamiltoniana nelle nuove coordinate è semplicemente $\tilde{H}(Q,P) = P^2/2$, le cui equazioni di Hamilton sono:
$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \dot{P} = 0 \end{cases}$$
che sono risolte da: $P(t) \equiv P(0)$, $Q(t) = Q(0) + P(0)t$. I dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1,1)$ corrispondono a $(Q(0), P(0)) = (2/\sqrt{e}, \sqrt{e})$, cosicché
$$Q(t) = \frac{2}{\sqrt{e}}\Big(1 + \frac{et}{2}\Big), \qquad P(t) \equiv \sqrt{e}.$$
Usando la trasformazione canonica inversa determinata sopra (i.e., $q = \frac{1}{2}Q^2P^2\log P$, $p = \frac{2}{QP}$) per tornare alla variabili originali, troviamo:
$$q(t) = \Big(1 + \frac{et}{2}\Big)^2, \qquad p(t) = \Big(1 + \frac{et}{2}\Big)^{-1}.$$
Verifichiamo che tale soluzione risolve le equazioni di Hamilton originali. Si noti innanzitutto che $q(t)p^2(t) \equiv 1$, cosicché $e^{q(t)p^2(t)} \equiv e$. Inoltre $\dot{q}(t) = e\big(1 + \frac{et}{2}\big)$, e quindi risulta:
$$\dot{q}(t) = q(t)p(t)e^{q(t)p^2(t)},$$
come desiderato. Analogamente,
$$\dot{p}(t) = -\frac{e}{2}\big(1 + \frac{et}{2}\big)^{-2} = -\frac{p^2(t)}{2}e^{q(t)p^2(t)},$$
come desiderato.