FM210 / MA - Seconda prova pre-esonero (26-5-2017)

<u>Esercizio 1.</u> Un'asta rigida omogenea AB di lunghezza R e massa M è vincolata ad avere l'estremo A sull'asse fisso x_3, orientato verticalmente verso l'alto, e B sull'elica circolare $\boldsymbol{\gamma}$ di equazioni parametriche

$$\boldsymbol{\gamma}(u) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ hu \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R},$$

dove h è una costante positiva.

Oltre alla forza peso, l'asta è soggetta ad una forza

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2az_G(z_G^2 - h^2) \end{pmatrix},$$

dove z_G è la coordinata verticale del baricentro dell'asta e $a > 0$ un parametro positivo.

1. Usando u come coordinata generalizzata, si scriva la Lagrangiana del sistema e l'equazione di Eulero-Lagrange corrispondente. [Si ricordi che il momento d'inerzia I di un'asta omogenea di massa M e lunghezza R, attorno a un asse perpendicolare all'asta e passante per il baricentro, è uguale a $I = \frac{1}{12}MR^2$.]

2. Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.

3. Si identifichino, al variare del parametro $a > 0$, i punti di equilibrio del sistema, e se ne discuta la stabilità.

4. Si risolva l'equazione del moto per quadrature e si discuta qualitativamente la natura dei moti, al variare del parametro $a > 0$ (in particolare, si disegnino, al variare di $a > 0$, le curve di livello sul piano delle fasi $(u, \dot{u})$ per i diversi valori assunti dall'integrale primo identificato sopra). Nel caso di moti periodici non banali, se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

SOLUZIONE. Iniziamo con il disegnare una possibile configurazione del sistema:

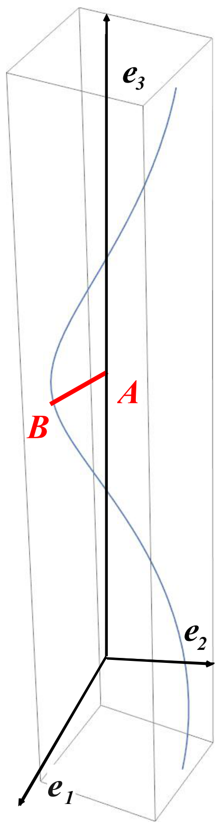

Figura 1: Sistema asta-elica

Si noti che l'asta è necessariamente perpendicolare all'asse e_3, in quanto sia la lunghezza dell'asta che la distanza tra B e l'asse e_3 è R.

1. Il baricentro G dell'asta ha coordinate:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{R}{2}\cos u \\ x_2 = \frac{R}{2}\sin u \\ x_3 = hu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{2}\dot{u}\sin u \\ \dot{x}_2 = \frac{R}{2}\dot{u}\cos u \\ \dot{x}_3 = h\dot{u} \end{cases}$$

Pertanto la velocità del centro di massa sarà:

$$v_G = \sqrt{(\frac{R^2}{4} + h^2)\dot{u}^2}$$

Applicando il teorema di König ($T = \frac{1}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$, dove I_G è il momento d'inerzia attorno a un asse di rotazione perpendicolare all'asta e passante per il baricentro, $I_G = MR^2/12$), otteniamo che l'energia cinetica dell'asta è:

$$T = \frac{1}{2}M\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{12}\dot{u}^2$$

L'asta è soggetta alla forza peso, che è conservativa, di energia potenziale $V_g = Mghu$, e alla forza $\mathbf{F}$, che è conservativa, di energia potenziale V_F:

$$V_F = -\int \mathbf{F} d\mathbf{x} = -\int 2az_G(z_G^2 - h^2)dz_G \overset{z_G=hu}{=} -ah^4\left(\frac{u^4}{2} - u^2\right)$$

Pertanto l'energia potenziale del sistema è: $V = Mghu - ah^4(\frac{u^4}{2} - u^2)$
La Lagrangiana è quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left(\frac{R^2}{3} + h^2\right)\dot{u}^2 - Mghu + ah^4\left(\frac{u^4}{2} - u^2\right)$$

Abbiamo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = -Mgh + 2ah^4(u^3 - u)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = \left(\frac{MR^2}{3} + Mh^2\right)\ddot{u}$$

Pertanto l'equazione di Eulero-Lagrange è:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} = \left(\frac{MR^2}{3} + Mh^2\right)\ddot{u} = -Mgh + 2ah^4(u^3 - u) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}$$

2. L'energia meccanica è:

$$E = \left(\frac{MR^2}{6} + \frac{1}{2}Mh^2\right)\dot{u}^2 + Mghu - ah^4\left(\frac{u^4}{2} - u^2\right)$$

La verifica esplicita della conservazione di E è lasciata al lettore.

3. I punti di equilibrio del sistema sono tali che $\ddot{u} = 0$, i.e., soddisfano l'equazione

$$u^3 - u = \frac{Mg}{2ah^3}$$

Ciò equivale a trovare i punti di intersezione tra la funzione $u^3 - u$ e la retta orizzontale $\frac{Mg}{2ah^3}$. Notiamo che la funzione $u^3 - u$ ha un punto di massimo in $\overline{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e un punto di minimo in $\underline{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. In $\overline{x}$ la funzione vale $\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Pertanto sapendo che $a > 0$ dobbiamo distinguere tre casi:

(a) *Caso* $a > \frac{3\sqrt{3}Mg}{4h^3}$: in questo caso esistono 3 soluzioni reali dell'equazione:

$$-1 < u_1 < -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < u_2 < 0$$

$$u_3 > 1$$

(b) *Caso* $a = \frac{3\sqrt{3}Mg}{4h^3}$: in questo caso esistono 2 soluzioni reali dell'equazione:

$$u_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_2 > 1$$

(c) *Caso* $a < \frac{3\sqrt{3}Mg}{4h^3}$: in questo caso esiste una sola soluzione reale dell'equazione:

$$u_1 > 1$$

Per studiarne la stabilità consideriamo la derivata seconda del potenziale:

$$V''(u) = -2ah^4(3u^2 - 1)$$

(a) *Caso* $a > \frac{3\sqrt{3}Mg}{4h^3}$:

$$V''(u_1) < 0 \Rightarrow \; u_1 \text{ è un punto di equilibrio instabile.}$$

$$V''(u_2) > 0 \Rightarrow \; u_2 \text{ è un punto di equilibrio stabile.}$$

$$V''(u_3) < 0 \Rightarrow \; u_3 \text{ è un punto di equilibrio instabile.}$$

(b) *Caso* $a = \frac{3\sqrt{3}Mg}{4h^3}$:

$$V''(u_1) = 0$$

Inoltre notiamo che a destra di u_1 si ha che $V'' > 0$, mentre a sinistra di u_1 si ha che $V'' < 0$: pertanto u_1 è un flesso, ed è quindi un punto di equilibrio instabile.

$$V''(u_2) < 0 \Rightarrow \; u_2 \text{ è un punto di equilibrio instabile.}$$

(c) *Caso* $a < \frac{3\sqrt{3}Mg}{4h^3}$:

$$V''(u_1) < 0 \Rightarrow \; u_1 \text{ è un punto di equilibrio instabile.}$$

4. Il moto può essere risolto per quadrature seguendo la strategia generale di soluzione dei sistemi meccanici conservativi unidimensionali (dettagli lasciati al lettore). Riportiamo in figura i grafici dei potenziali e delle curve di livello:

   (a) *Caso* $a > \frac{3\sqrt{3}Mg}{4h^3}$*:*

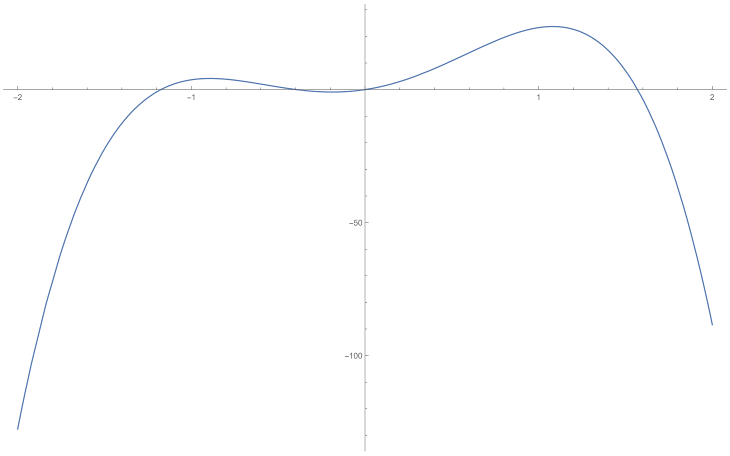

Figura 2: Grafico energia potenziale

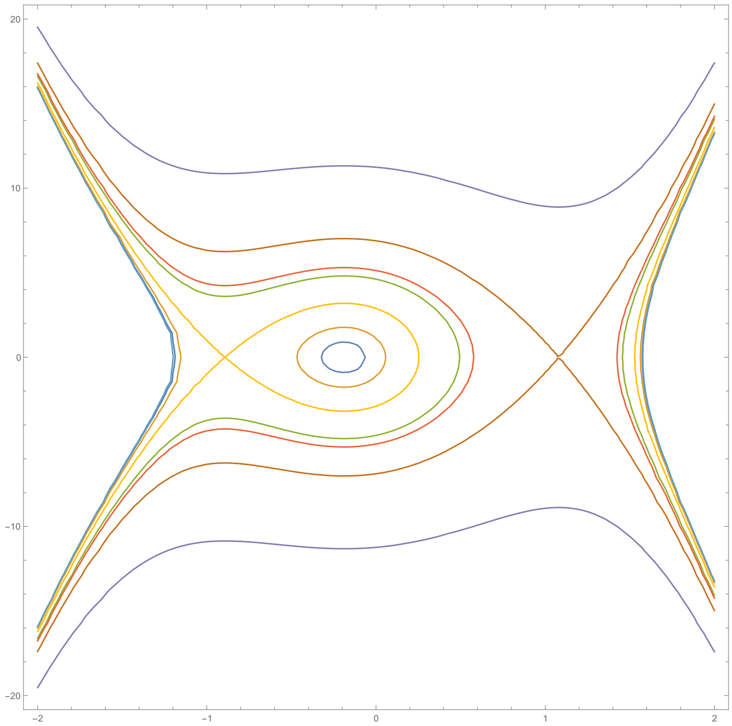

Figura 3: Curve di livello

Al variare dell'energia e dei dati iniziali, Il sistema ammette:

- tre moti 'banali', $u(t) \equiv u_1$, $i = 1, 2, 3$;
- moti limitati periodici, se $V(u_2) < E < V(u_1)$ e $u(0) \in (u_1, u_2)$;
- moti limitati a-periodici, se $E = V(u_1)$ e $u(0) > u_1$;
- moti aperti in tutti gli altri casi: se $E < V(u_3)$ e $\neq V(u_1)$, e $u(0) < u_3$, il moto tende a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro; se $E = V(u_1)$, e $u(0) < u_1$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a u_1 nel futuro, o viceversa; se $E < V(u_3)$, e $u(0) > u_3$, il moto tende a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro; se $E > V(u_3)$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa; se $E = V(u_3)$, e $u(0) < u_3$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a u_3 nel futuro, o viceversa; se $E = V(u_3)$, e $u(0) > u_3$, il moto tende a $+\infty$ nel passato e a u_3 nel futuro, o viceversa.

Nel caso in cui il moto sia periodico non banale, i.e., se $V(u_2) <$

$E < V(u_1)$ e $u(0) \in (u_1, u_2)$, il periodo è

$$T = \sqrt{2M} \int_{u_E{}^-}^{u_E{}^+} \frac{du}{\sqrt{E - Mghu + ah^4(\frac{u^4}{2} - u^2)}}$$

dove $u_E{}^-$ e $u_E{}^+$ sono le due soluzioni di $V(u) = E$ tali che $u_1 < u_E^- < u_2 < u_E^+ < u_3$.

(b) *Caso* $a = \frac{3\sqrt{3}Mg}{4h^3}$:

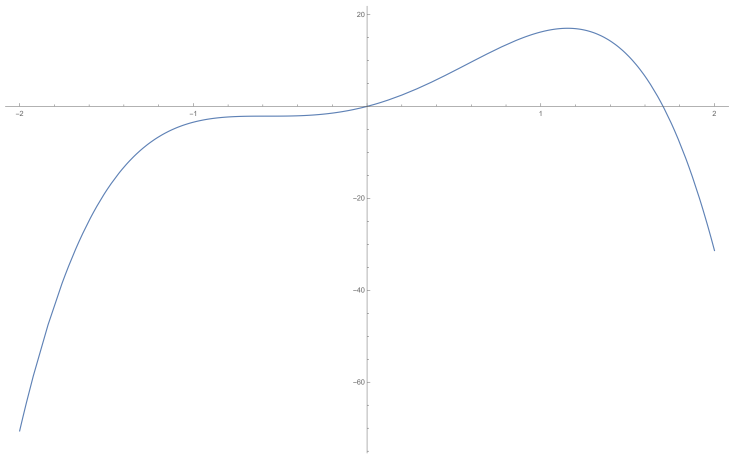

Figura 4: Grafico energia potenziale

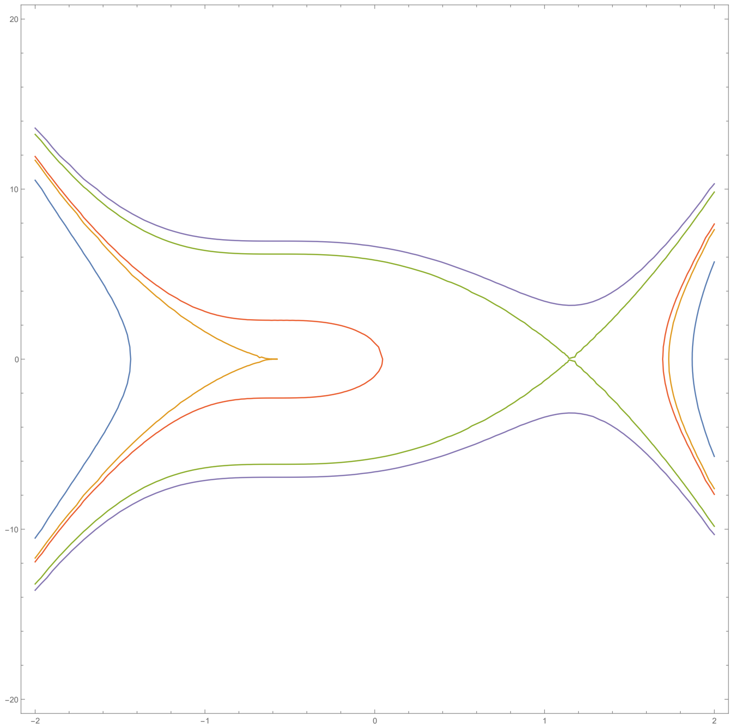

Figura 5: Curve di livello

In questo caso il sistema ammette o moti 'banali', $u(t) \equiv u_i$, $i = 1, 2$, o moti aperti: se $E < V(u_2)$ e $\neq V(u_1)$, e $u(0) < u_2$, il moto tende a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro; se $E = V(u_1)$, e $u(0) < u_1$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a u_1 nel futuro, o viceversa; se $E < V(u_2)$, e $u(0) > u_2$, il moto tende a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro; se $E > V(u_2)$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa; se $E = V(u_2)$, e $u(0) < u_2$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a u_2 nel futuro, o viceversa; se $E = V(u_2)$, e $u(0) > u_3$, il moto tende a $+\infty$ nel passato e a u_2 nel futuro, o viceversa.

(c) *Caso* $a < \frac{3\sqrt{3}Mg}{4h^3}$*:*

In questo caso il sistema ammette o il moto 'banale' $u(t) \equiv u_1$, o moti aperti: se $E < V(u_1)$ e $u(0) < u_1$, il moto tende a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro; se $E < V(u_1)$, e $u(0) > u_1$, il moto tende a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro; se $E = V(u_1)$, e $u(0) < u_1$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a u_1 nel futuro, o viceversa; se $E = V(u_1)$, e $u(0) > u_1$, il moto tende a $+\infty$ nel passato e a u_1 nel futuro, o viceversa; se $E > V(u_1)$, il moto tende a $-\infty$ nel

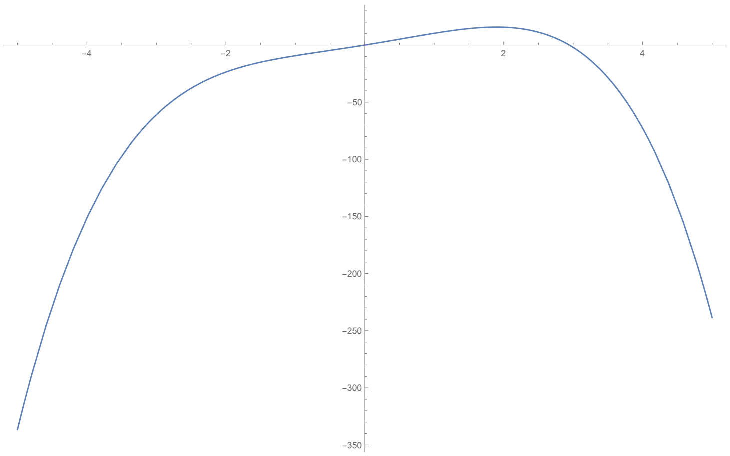

Figura 6: Grafico energia potenziale

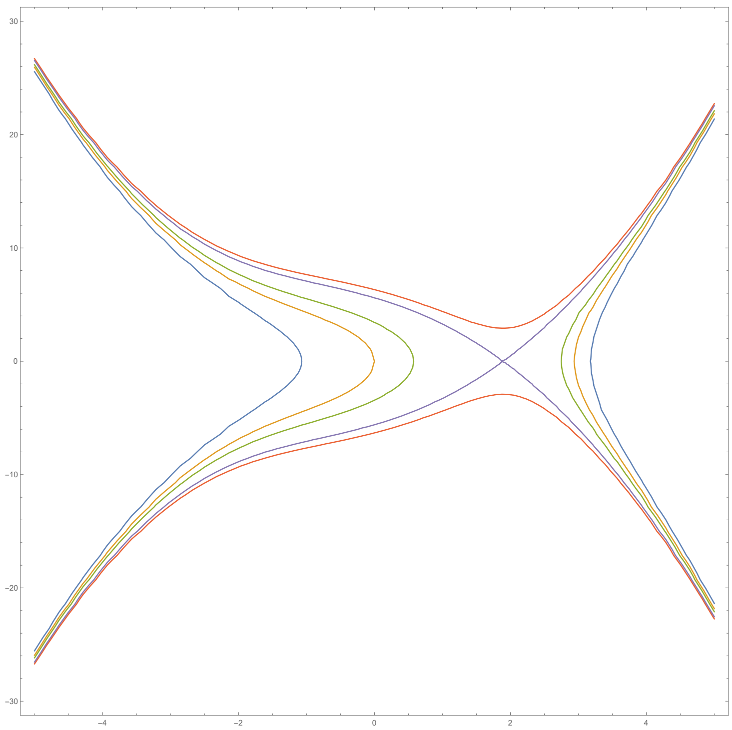

Figura 7: Curve di livello

passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa.

<u>ESERCIZIO 2.</u> Per $q > 0$ e $q \neq 1$, si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2 \log^2 q}$$

1. Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange.

2. Si calcoli l'Hamiltoniana corrispondente e si scrivano le equazioni di Hamilton.

3. Si determini il valore dei parametri a e b per cui la seguente trasformazione è canonica:
$$\begin{cases} Q = a \log p + \log q \\ P = -p^b q \log q \end{cases}$$
Per tali valori dei parametri, si costruisca la trasformazione inversa, e si determinino i domini su cui le trasformazioni diretta e inversa sono definite.

4. Si usi la trasformazione canonica determinata al punto precedente per integrare le equazioni di Hamilton con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (e, 1/e)$. Più precisamente: si mappi l'Hamiltoniana assegnata in una nuova Hamiltoniana $\tilde{H}(Q, P)$, si scrivano e risolvano le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili, e poi si torni alle variabili (q, p) usando la trasformazione canonica inversa. La soluzione trovata è globale nel tempo o no? Se no, qual è l'intervallo di definizione della soluzione?

5. Si verifichi che la soluzione trovata risolve le equazioni di Eulero-Lagrange originali.

SOLUZIONE.

1. Abbiamo:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\dot{q}^2 \frac{\log q + 1}{q^3 \log^3 q}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\ddot{q}}{q^2 \log^2 q} - \frac{2\dot{q}^2(\log q + 1)}{q^3 \log^3 q}$$
Pertanto l'equazione di Eulero-Lagrange è:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\ddot{q}}{q^2 \log^2 q} - \frac{2\dot{q}^2(\log q + 1)}{q^3 \log^3 q} = -\dot{q}^2 \frac{\log q + 1}{q^3 \log^3 q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$
ovvero
$$\ddot{q} = \dot{q}^2 \frac{\log q + 1}{q \log q}. \tag{1}$$

2. Ponendo $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = \frac{\dot q}{q^2 \log^2}$ possiamo scrivere l'Hamiltoniana corrispondente:

$$\mathcal{H}(q,p) = p\dot q - \mathcal{L}(q,\dot q) = \frac{p^2 q^2 \log^2 q}{2}$$

Pertanto le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot q = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = q^2 p \log^2 q \\ \dot p = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -p^2 q \log q (1 + \log q) \end{cases}$$

3. Per determinare i valori di a e b per cui la trasformazione è canonica imponiamo $\{Q, P\} = 1$:

$$\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = p^{b-1}[-b\log q + a \log q + a] = 1 \Leftrightarrow \ a = b = 1$$

Pertanto la trasformazione è:

$$\begin{cases} Q = \log(pq) \\ P = -pq\log q \end{cases}$$

Da cui ricaviamo:

$$\begin{cases} q = e^{-Pe^{-Q}} \\ p = e^{Pe^{-Q}+Q} \end{cases}$$

Quindi la trasformazione diretta è definita per $p > 0$ e $q > 0$, mentre la trasformazione inversa è definita per ogni valore di P e Q.

4. L'Hamiltoniana $\mathcal{H}(q,p)$ viene mappata nell'Hamiltoniana $\tilde{\mathcal{H}}(Q,P) = \dfrac{P^2}{2}$. Le nuove equazioni Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot Q = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = P \\ \dot P = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \end{cases}$$

I dati iniziali $(q(0), p(0)) = (e, 1/e)$ corrispondono ai dati iniziali $(Q(0), P(0)) = (0, -1)$. Troviamo le soluzioni delle equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot Q = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = P \\ \dot P = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot Q = P \\ P(t) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q(t) = -t \\ P(t) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(t) = e^{e^t} \\ p(t) = e^{-(e^t+t)} \end{cases}$$

La soluzione $q(t)$ è chiaramente definita globalmente nel tempo.

5. Si noti che la soluzione trovata nel punto precedente implica che

$$\dot{q}(t) = e^{e^t+t} = q(t)\log q(t)$$
$$\ddot{q}(t) = e^{e^t+t}(e^t+1) = q(t)\log q(t)(\log q(t)+1)$$

Sostituendo tali espressioni nella (1) otteniamo un'identità, pertanto $q(t)$ risolve l'equazione di Eulero-Lagrange originale.