

FM210 / MA - Prima prova pre-esonero (7-4-2017)

1. Un punto materiale di massa m si muove in una dimensione sotto l'effetto di una forza conservativa di energia potenziale

$$U(x) = -\frac{V_0}{2 - 2 \sinh^2(x/x_0) + \sinh^4(x/x_0)},$$

dove V_0 e x_0 sono parametri positivi.

- (a) Si scriva l'equazione del moto
- (b) Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione
- (c) Si disegni il grafico del potenziale. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità. Per i punti di equilibrio stabile, si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio.
- (d) Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi (x, \dot{x}) e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare della grandezza conservata identificata sopra. Nel caso di moti periodici non banali, se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.

Soluzione.

- (a) L'equazione del moto è:

$$m\ddot{x} = -U'(x) = -4 \frac{V_0 \sinh(x/x_0) \cosh(x/x_0) [\sinh^2(x/x_0) - 1]}{x_0 [2 - 2 \sinh^2(x/x_0) + \sinh^4(x/x_0)]^2} \quad (1)$$

- (b) Un integrale primo del moto è l'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x),$$

la cui conservazione si verifica facilmente considerando la derivata di E rispetto al tempo:

$$\dot{E} = \dot{x} [m\ddot{x} + U'(x)],$$

che è zero, poiché l'espressione in parentesi quadra è nulla per l'equazione del moto $m\ddot{x} = -U'(x)$.

- (c) Si notino innanzitutto le seguenti proprietà di $U(x)$: (i) $U(x)$ è pari; (ii) il denominatore nell'espressione del potenziale è sempre ≥ 1 , come si vede riscrivendolo nella forma $1 + [\sinh^2(x/x_0) - 1]^2$, e quindi $-V_0 \leq U(x) \leq 0$; (iii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = 0$. Inoltre la derivata di $U(x)$ (la cui espressione si evince dalla (1)) si annulla in $x = 0$ e in $x = \pm \operatorname{arcsinh} 1 = \pm \log(1 + \sqrt{2})$. Il grafico risultante è mostrato in Figura 1:

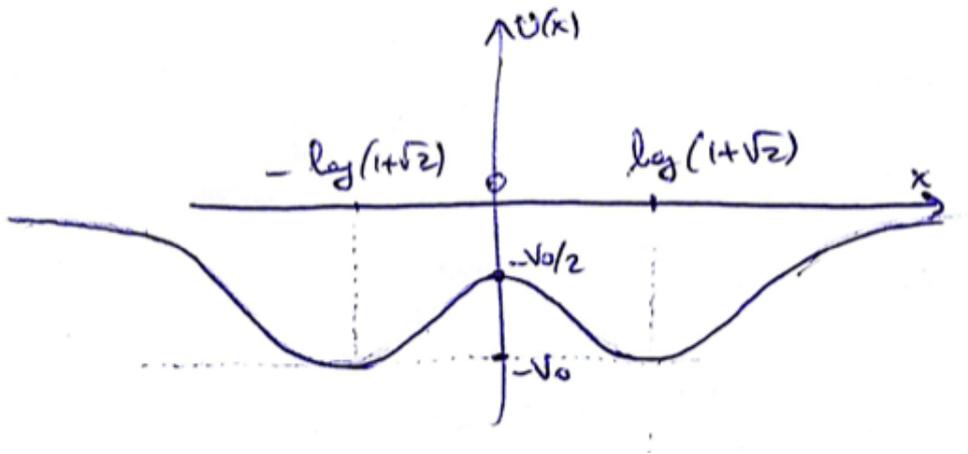


Figura 1: Grafico del potenziale $U(x)$.

I punti di equilibrio sono $x_0 = 0$ (instabile), $x_1 = \log(1 + \sqrt{2})$ e $x_2 = -\log(1 + \sqrt{2})$ (stabili).

La frequenza angolare delle piccole oscillazioni attorno a x_1 o a x_2 è la stessa, ed è uguale a

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{U''(x_1)}{m}} = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}V_0}{x_0^2}}.$$

- (d) Le curve di livello associate ad U , di energia E , hanno equazione:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

Il loro grafico qualitativo, al variare di E , è mostrato in Figura 2. In corrispondenza delle diverse traiettorie nel piano delle fasi mostrate in Fig.2, il sistema svolge moti della seguente natura qualitativa:

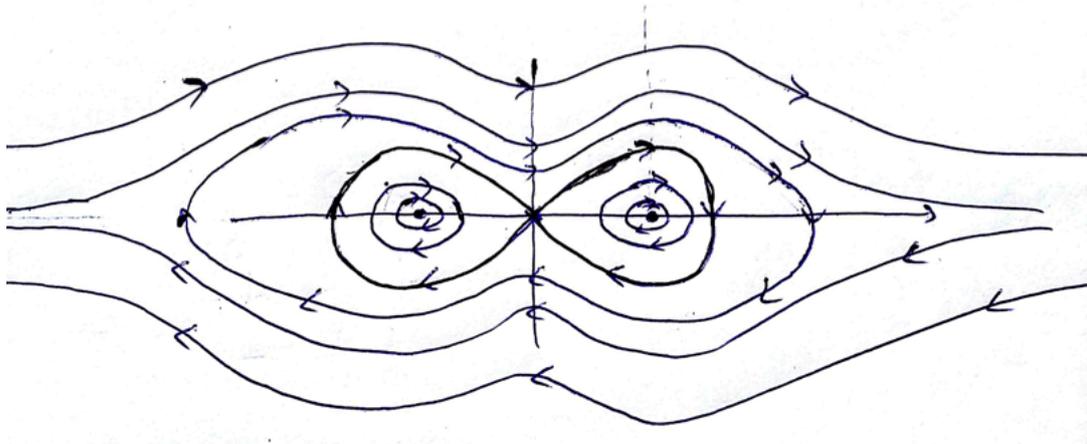


Figura 2: Curve di livello associate al potenziale $U(x)$, al variare dell'energia E .

- moti 'banali' sui tre punti di equilibrio ($x(t) \equiv x_i, i = 0, 1, 2$),
- moti periodici non banali che consistono in oscillazioni attorno a x_1 o a x_2 (se $-V_0 < E < -V_0/2$),
- moti periodici non banali che consistono in oscillazioni centrate in x_0 (se $-V_0/2 < E < 0$),
- moti limitati a-periodici, sulla separatrice, che tendono a x_0 sia nel passato che nel futuro (se $E = -V_0/2$ e $x(0) \neq x_0$)
- moti illimitati, che tendono a $+\infty$ nel futuro e a $-\infty$ nel passato, o viceversa (se $E \geq 0$; nel caso $E = 0$ il punto raggiunge l'infinito con velocità nulla, mentre per $E > 0$ lo raggiunge con velocità positiva).

Nei casi in cui il moto sia periodico non banale (i casi due e tre nella lista sopra), il periodo T può essere calcolato in termini di un integrale definito:

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{V_0}{2 - 2 \sinh^2(x/x_0) + \sinh^4(x/x_0)} \right)}}$$

dove x_{\pm} sono i punti di inversione, definiti come le due radici positive (risp. negative) dell'equazione $E = U(x)$, nel caso in cui $-V_0 < E < -V_0/2$ e $x(0) > 0$ (risp. $x(0) < 0$), o come le due uniche radici di $E = U(x)$, nel caso in cui $-V_0/2 < E < 0$.

2. (a) Il moto di una particella di massa m in \mathbb{R}^3 è descritto dalla seguente equazione del moto associata a una forza centrale:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{V_0}{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^3 - \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^2 + \frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right] \hat{\mathbf{r}}.$$

dove V_0 e r_0 sono parametri positivi.

- (b) Si calcoli il potenziale centrale corrispondente.
- (c) Supponendo il momento angolare diverso da zero, si descriva il sistema in coordinate polari sul piano ortogonale a \mathbf{L} : si scriva l'equazione del moto per la variabile radiale e si determini il potenziale efficace corrispondente
- (d) Si disegni il grafico del potenziale efficace e delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare dell'energia meccanica E e del modulo L del momento angolare.
- (e) Si determinino i punti di equilibrio del moto radiale e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare di E e di L .
- (f) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (eventualmente in termini di un integrale definito).

Soluzione.

- (a) L'equazione per il potenziale centrale associato alla forza assegnata è:

$$V'(\rho) = \frac{V_0}{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{\rho} \right)^3 - \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^2 + \frac{r_0}{\rho} \right],$$

da cui

$$V(\rho) = V_0 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^2 + \frac{r_0}{\rho} + \log \frac{\rho}{r_0} \right].$$

- (b) Passando a coordinate polari ρ e θ sul piano $x' - y'$ ortogonale all'asse $\hat{\mathbf{L}}$, le equazioni del moto prendono la forma:

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho), \\ \dot{\theta} = L/(m\rho^2), \end{cases}$$

dove il potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$ è definito come segue:

$$\begin{aligned} V_{eff}(\rho) &= V_0 \left[\frac{L^2}{2mV_0\rho^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^2 + \frac{r_0}{\rho} + \log \frac{\rho}{r_0} \right] \\ &= V_0 \left[-\frac{\alpha}{2} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^2 + \frac{r_0}{\rho} + \log \frac{\rho}{r_0} \right], \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo definito:

$$\alpha = 1 - \frac{L^2}{mV_0r_0^2}.$$

Si noti che, visto che $L > 0$, $\alpha \in (-\infty, 1)$.

- (c) Per disegnare il grafico del potenziale efficace, notiamo innanzitutto che $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = -\infty$, se $0 < \alpha < 1$, mentre $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{eff}(\rho) = +\infty$, se $\alpha \leq 0$. Inoltre, per ogni $\alpha < 1$, $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$. Si ha poi:

$$\begin{aligned} V'_{eff}(\rho) &= \frac{V_0}{r_0} \left[\alpha \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^3 - \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^2 + \frac{r_0}{\rho} \right] \\ &= \frac{V_0 r_0^2}{\rho^3} \left[(\rho/r_0)^2 - (\rho/r_0) + \alpha \right], \end{aligned}$$

le cui radici sono

$$\rho_1 = r_0 \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \rho_2 = r_0 \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha}}{2}.$$

Si ricordi che solo le radici positive sono accettabili: quindi V_{eff} ha:

- un punto stazionario per $\alpha \leq 0 \Leftrightarrow L \geq \sqrt{mr_0^2 V_0}$
- due punti stazionari distinti per $0 < \alpha < 1/4 \Leftrightarrow \sqrt{3mr_0^2 V_0/4} < L < \sqrt{mr_0^2 V_0}$;
- due coincidenti per $\alpha = 1/4 \Leftrightarrow L = \sqrt{3mr_0^2 V_0/4}$;
- nessun punto stazionario per $1/4 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < L < \sqrt{3mr_0^2 V_0/4}$.

Il grafico qualitativo di $V_{eff}(\rho)$ nei quattro casi è mostrato in Fig.3.

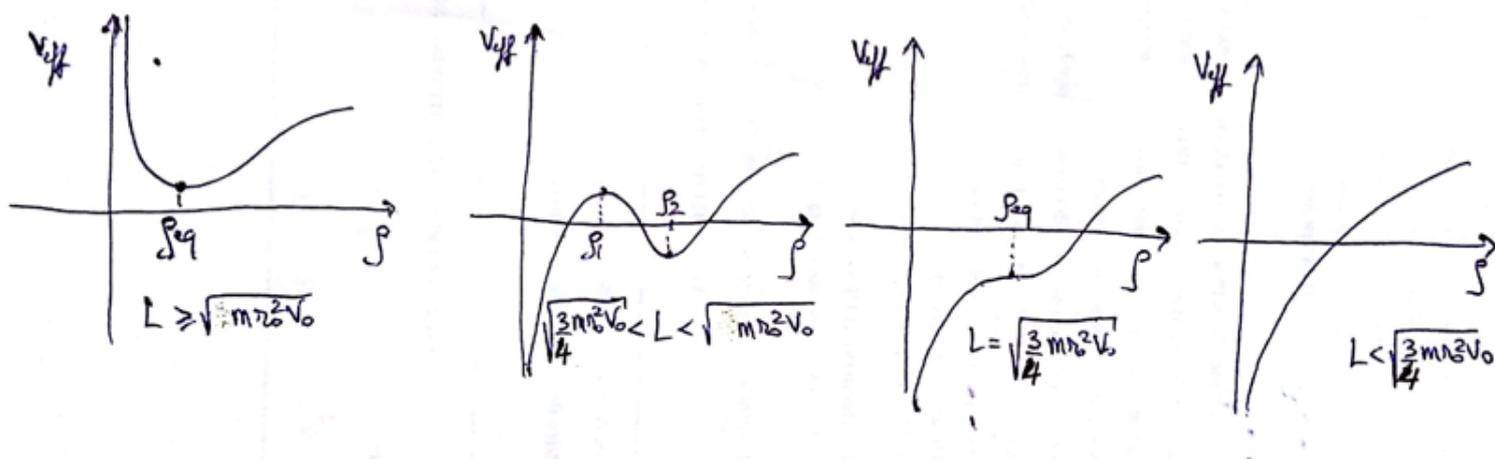


Figura 3: Grafico del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$, al variare del momento angolare L .

Il grafico delle curve di livello corrispondenti è mostrato in Fig.4.

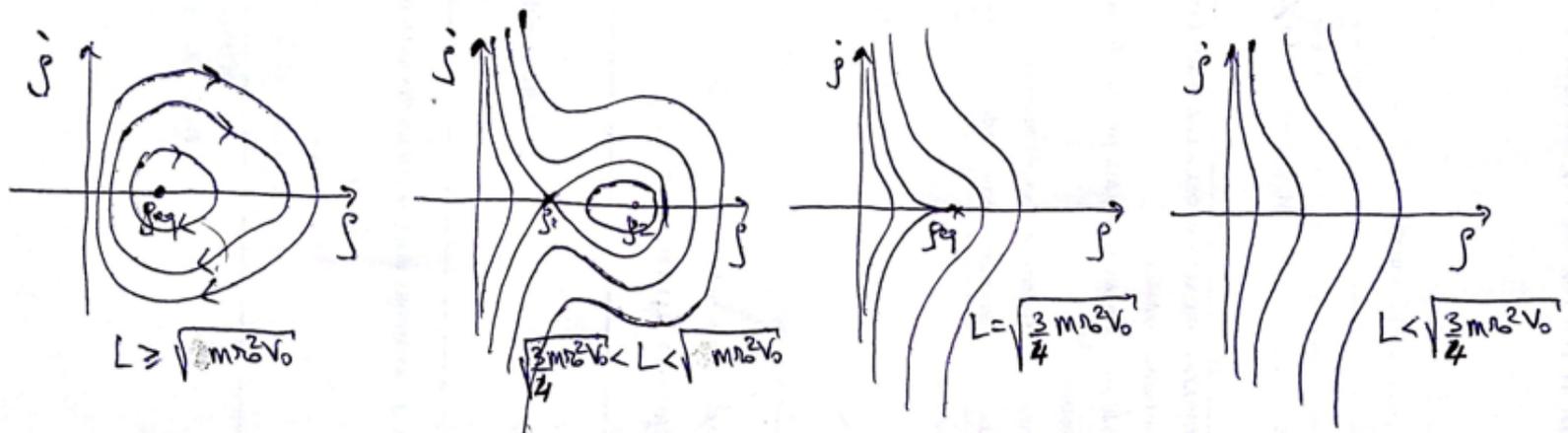


Figura 4: Curve di livello per il moto radiale associate al potenziale $V_{eff}(\rho)$, al variare dell'energia E e del momento angolare L .

- (d) Come già discusso sopra, il sistema ammette punti di equilibrio se e solo se $L \geq \sqrt{\frac{3mr_0^2V_0}{4}}$: se $L \geq \sqrt{mr_0^2V_0}$ il sistema ammette un punto di equilibrio $\rho_{eq} = r_0 \frac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2}$, stabile; se $\sqrt{\frac{3mr_0^2V_0}{4}} <$

$L < \sqrt{mr_0^2 V_0}$, il sistema ammette due punti di equilibrio, $\rho_1 = r_0 \frac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2}$, instabile, e $\rho_2 = r_0 \frac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2}$, stabile; se $L = \sqrt{3mr_0^2 V_0/4}$, il sistema ammette un unico punto di equilibrio $\rho = \rho_0 := r_0/2$, instabile.

Al variare di E e di L , il sistema svolge moti della seguente natura qualitativa:

i. Caso $L \geq \sqrt{mr_0^2 V_0}$. Il sistema ammette:

- un moto ‘banale’ sul punto di equilibrio $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$,
- moti periodici non banali che consistono in oscillazioni attorno a ρ_{eq} , in tutti gli altri casi.

ii. Caso $\sqrt{3mr_0^2 V_0/4} < L < \sqrt{mr_0^2 V_0}$. Il sistema ammette:

- moti ‘banali’ sui due punti di equilibrio ($\rho(t) \equiv \rho_i$, $i = 1, 2$),
- moti periodici non banali che consistono in oscillazioni attorno a ρ_2 (se $V_{eff}(\rho_2) < E < V_{eff}(\rho_1)$ e $\rho(0) > \rho_1$),
- moti limitati a-periodici, sulla separatrice, che tendono a ρ_1 sia nel passato che nel futuro (se $E = V_{eff}(\rho_1)$ e $\rho(0) > \rho_1$)
- moti limitati a-periodici, sulla separatrice, che tendono a ρ_1 nel passato e cadono sul centro nel futuro, o viceversa (se $E = V_{eff}(\rho_1)$ e $\rho(0) < \rho_1$)
- moti limitati a-periodici non critici, che cadono sul centro sia nel passato che nel futuro (in tutti gli altri casi).

iii. Caso $L = \sqrt{3mr_0^2 V_0/4}$. Il sistema ammette:

- un moto ‘banale’ sul punto di equilibrio ($\rho(t) \equiv \rho_{eq}$),
- moti limitati a-periodici, sulla separatrice, che tendono a ρ_{eq} nel passato e cadono sul centro nel futuro, o viceversa (se $E = V_{eff}(\rho_{eq})$ e $\rho(0) < \rho_{eq}$),
- moti limitati a-periodici non critici, che cadono sul centro sia nel passato che nel futuro (in tutti gli altri casi).

iv. Caso $L < \sqrt{3mr_0^2 V_0/4}$. Il sistema ammette solo:

- moti limitati a-periodici non critici, che cadono sul centro sia nel passato che nel futuro.

(e) Il moto complessivo è periodico nei seguenti casi:

- se il moto radiale è ‘banale’, i.e., della forma $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$, con ρ_{eq} uno dei punti di equilibrio. In tal caso il moto complessivo

è circolare uniforme, di periodo

$$T = \frac{2\pi m \rho_{eq}^2}{L}.$$

- nei casi in cui il moto radiale è periodico non banale di periodo T_0 (i.e., nel caso in cui $L \geq \sqrt{mr_0^2 V_0}$ e $E > V_{eff}(\rho_{eq})$ o in cui $\sqrt{3mr_0^2 V_0/4} < L < \sqrt{mr_0^2 V_0}$, $V_{eff}(\rho_2) < E < V_{eff}(\rho_1)$ e $\rho(0) > \rho_1$), e il secondo periodo T_1 del moto angolare è in rapporto razionale con T_0 . Tale caso si verifica per le scelte di E e L per cui:

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\pi} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L d\rho}{m \rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} [E + V_0 (\frac{\alpha r_0^2}{2\rho^2} - \frac{r_0}{\rho} - \log \frac{\rho}{r_0})]}} = \frac{p}{q},$$

dove ρ_{\pm} sono i due punti di inversioni del moto radiale (i.e., le uniche due radici di $E = V_{eff}(\rho)$, nel caso in cui $L \geq \sqrt{mr_0^2 V_0}$ e $E > V_{eff}(\rho_{eq})$, o le due radici di $E = V_{eff}(\rho)$ tali che $\rho_1 < \rho_- < \rho_2 < \rho_+$, nel caso in cui $\sqrt{3mr_0^2 V_0/4} < L < \sqrt{mr_0^2 V_0}$, $V_{eff}(\rho_2) < E < V_{eff}(\rho_1)$ e $\rho(0) > \rho_1$); inoltre p e q sono due numeri interi, primi tra loro. In tal caso, il moto complessivo ha periodo $T = qT_0 = pT_1$.