Soluzioni del Tutorato 4 (29/03/2017)

Esercizio 1

Si consideri il moto di una particella di massa $m = 1$ soggetta a una forza centrale di potenziale

$$V(|\mathbf{r}|) = \log(|\mathbf{r}|)$$

Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo L del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:

- si studi il moto radiale: si disegni il grafico del potenziale efficace e delle curve di livello, si discuta la natura qualitativa del moto radiale, si esibisca la soluzione per quadrature, si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.

- si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.

- si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.

Soluzione

- Il potenziale efficace associato al problema assegnato è

  $$V_{eff}(\rho) = \log(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2}$$

  Valutiamo i punti di stazionarietà di $V_{eff}(\rho)$:

  $$V'_{eff}(\rho) = \frac{1}{\rho} - \frac{L^2}{\rho^3} = 0$$

  da cui $\rho_{eq} = L$. Per tracciare un grafico qualitativo studiamo l'andamento di V_{eff} agli estremi del dominio di definizione:

  $$\lim_{\rho\to 0} V_{eff}(\rho) = +\infty, \qquad \lim_{\rho\to\infty} V_{eff}(\rho) = +\infty$$

  Il grafico del potenziale e il rispettivo andamento nello spazio delle fasi sono mostrati nelle due figure seguenti:

  La natura qualitativa del moto è molto semplice: il sistema ammette solo orbite chiuse e periodiche, che consistono in oscillazioni tra i due punti di inversione $\rho_\pm$ (le due radici di $E = V_{eff}(\rho)$ per $E > V_{eff}(\rho_{eq})$), con l'eccezione del moto banale $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$ sul punto di equilibrio stabile del moto radiale, che corrisponde al caso di energia minima $E = V_{eff}(\rho_{eq})$.

  La soluzione per quadrature del moto radiale, nei casi in cui $E > V_{eff}(\rho_{eq})$, è una funzione $\rho(t)$ periodica di periodo T_0, con

  $$T_0 = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - \log(\rho) - \frac{L^2}{2\rho^2}}}.$$

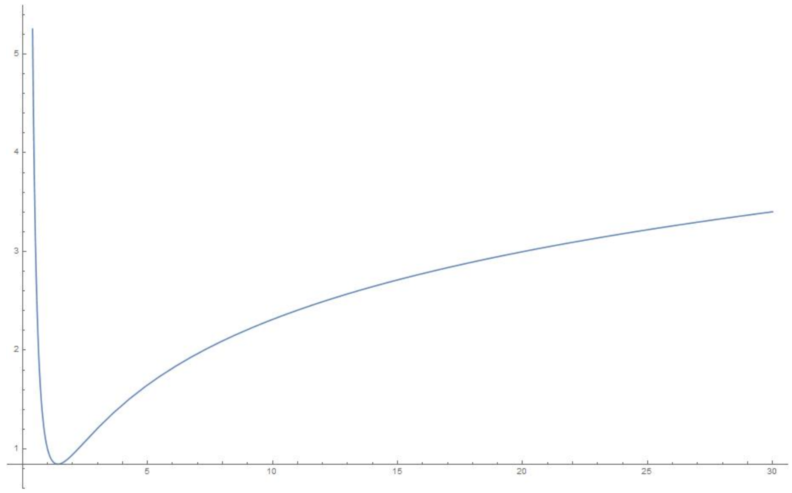

Figure 1: Grafico del potenziale $V_{eff}(\rho) = \log(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2}$

Nell'intervallo $[0, T_0]$, la legge oraria $\rho(t)$ è definita in modo implicito dalle seguenti equazioni:

$$\int_{\rho_-}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - \log(\rho) - \frac{L^2}{2\rho^2}}} = t, \qquad \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2},$$

$$\int_{\rho(t)}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - \log(\rho) - \frac{L^2}{2\rho^2}}} = t - \frac{T_0}{2}, \quad \text{se} \quad \frac{T_0}{2} \leq t \leq T_0,$$

dove abbiamo supposto che $\rho(0) = \rho_-$.

- Ottenuta $\rho(t)$ passiamo a studiare il moto angolare. La conservazione del momento angolare ci dice che:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\rho^2},$$

da cui, supponendo che l'origine degli angoli sia fissata in modo tale che $\theta(0) = 0$,

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{L}{\rho^2(s)} ds.$$

Tale legge oraria può essere riscritta nella forma:

$$\theta(t) = \omega_1 t + f_0(t),$$

dove ω_1 è definito dal seguente integrale definito:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{L}{\rho^2(s)} ds = \frac{2}{T_0} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L d\rho}{\rho^2 \sqrt{2(E - \log(\rho) - \frac{L^2}{2\rho^2}}},$$

mentre $f_0(t)$ è una funzione periodica di periodo T_0 a media nulla, definita come:

$$f_0(t) = \int_0^t \left[\frac{L}{\rho^2(s)} - \omega_1 \right] ds.$$

Il moto complessivo sarà periodico nei seguenti casi:

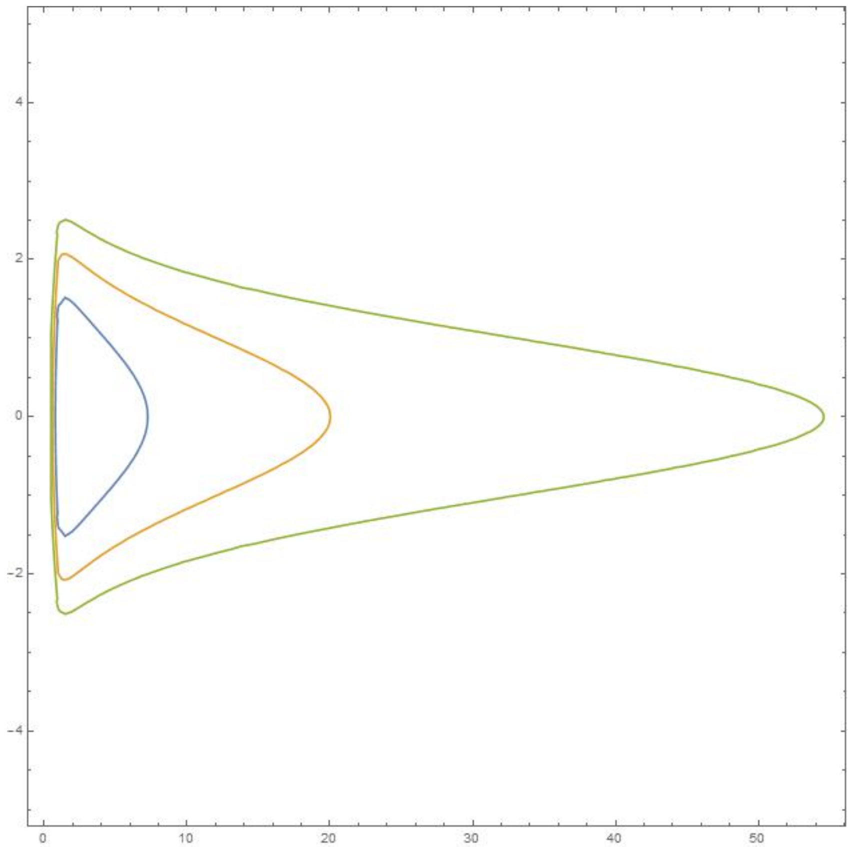

Figure 2: Curve di livello per il potenziale $V_{eff}(\rho) = \log(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2}$

- per $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$, nel qual caso il moto angolare è

$$\theta(t) = \omega_1 t$$

  con $\omega_1 = \frac{L}{\rho_{eq}^2}$, e il moto complessivo è circolare uniforme.

- per $\rho(t)$ periodica di periodo $T_0 > 0$ e per le scelte di E, L per cui il rapporto tra i due periodi del moto angolare T_0 e $T_1 = 2\pi/\omega_1$ è un numero razionale, i.e.,

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\pi}\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L d\rho}{\rho^2\sqrt{2(E - \log(\rho) - \frac{L^2}{2\rho^2}}} = \frac{m}{n},$$

  nel qual caso il moto complessivo è periodico di periodo $T = nT_0 = mT_1$.

Negli altri casi, i.e., se $T_0/T_1 \notin \mathbb{Q}$, il moto complessivo è quasi-periodico.

Esercizio 2 Si consideri il sistema meccanico costituito da due particelle di massa m nello spazio tri-dimensionale descritto dalle seguenti equazioni del moto ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$):

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = -2\alpha\big(1 - 3\big|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\big|^4\big)\big(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\big), \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = -2\alpha\big(1 - 3\big|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\big|^4\big)\big(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\big), \end{cases}$$

con $m, \alpha > 0$.

1. Si riconosca che le forze sono centrali, e quindi in particolare conservative. Si calcoli il potenziale $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x_2})$ corrispondente.
2. Passando alle coordinate del centro di massa e della posizione relativa $\mathbf{r}$ di una particella rispetto all'altra, si mostri che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. Si scriva inoltre l'equazione del moto per la posizione relativa $\mathbf{r}$.
3. Si identifichino tutti gli integrali primi del moto relativo e se ne verifichi esplicitamente la conservazione;
4. Si disegni il grafico del potenziale efficace al variare del momento angolare, si disegnino le orbite nel piano delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$ e si discutano le proprietà qualitative risultanti del moto radiale e del moto complessivo. In particolare:
   (a) Per $0 \leq L^2 < \frac{1}{12}m\alpha$ si trovino le condizioni sotto cui il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico;
   (b) Per $L^2 = \frac{1}{12}m\alpha$ si trovi un moto complessivo periodico nella coordinata relativa;
   (c) Per $L^2 > \frac{1}{12}m\alpha$ si dimostri che tutte le orbite sono aperte.

Soluzione

Si veda la soluzione dell'esercizio 2 del Tutorato VII del corso di FM210, A.A. 2012/13, disponibile su `http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2012/sol7.pdf`

Esercizio 3 Si consideri il moto di una particella di massa m nello spazio tri-dimensionale soggetta a una forza centrale di potenziale

$$U(\mathbf{x}) = V(|\mathbf{x}|)\ , \qquad V(\rho) = \alpha\frac{\log^2(\rho/r_0)}{\rho^2},$$

e $m, \alpha, r_0 > 0$.

1. Si scriva l'equazione del moto. Si identifichino tutti gli integrali primi del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
2. Si studi qualitativamente il moto, al variare del momento angolare $\mathbf{L}$. Piú in dettaglio:
   (a) Si disegni il grafico del potenziale V e di quello efficace V_{eff} al variare di L.
   (b) Si studi qualitativamente il moto distinguendo diversi casi. Nel caso $L < \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:
      - Si dimostri che esistono un punto di equilibrio stabile e uno instabile del moto radiale;
      - Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$;
      - Si dica per quali valori dell'energia il moto radiale è periodico;
      - Per tali valori si calcolino i periodi del moto radiale e del moto angolare come integrali definiti;
      - Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico.

   (c) Nel caso $L = \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:

- Si trovi un punto di equilibrio del moto radiale e se ne discuta la stabilità;
- Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$;
- Si dimostri che l'unica orbita periodica del moto radiale è quella banale (ρ costantemente uguale alla posizione di equilibrio); si calcoli il periodo del moto complessivo corrispondente.

(d) Nel caso $L > \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:

- Si dimostri che non esistono punti di equilibrio del moto radiale;
- Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$.
- Si dimostri che non esistono orbite periodiche del moto radiale e si discutano qualitativamente le proprietà del moto sia radiale che complessivo.

Soluzione

Si veda la soluzione dell'esercizio 1 del secondo esonero del corso di FM210, A.A. 2011/12, disponibile su
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210/sec-esonero-sol.pdf`

Esercizio 4 Una massa puntiforme m di coordinata $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ si muove sotto l'effetto di una forza centrale di energia potenziale $U(\mathbf{x}) = V(|\mathbf{x}|)$, con

$$V(\rho) = A_0 \frac{\rho^2}{\rho^2 + r_0^2},$$

e A_0, r_0 due parametri positivi.

1. Supponendo che il momento angolare $\mathbf{L}$ sia *diverso da zero*, si esprimano l'energia meccanica E e il modulo L del momento angolare in termini di $\rho, \dot{\rho}$ e $\dot{\theta}$, dove (ρ, θ) sono le coordinate polari sul piano ortogonale a $\mathbf{L}$, su cui si svolge il moto.
2. Dopo aver identificato il potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$, se ne disegni il grafico qualitativo per valori del momento angolare
$$0 < L < \sqrt{2A_0 m r_0^2}.$$
3. Per tali scelte di L, si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare dell'energia meccanica E.
4. Per tali scelte di L, si discuta la natura qualitativa del moto radiale e di quello complessivo, al variare di E.
5. Si esibisca una scelta dei dati iniziali per cui il moto *complessivo* è periodico, e se ne calcoli esplicitamente il periodo.

Soluzione

Si veda la soluzione dell'esercizio 2 del primo esonero del corso di MA, A.A. 2014/15, disponibile su
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2015/soluzione_esonero.pdf`