3^o tutorato - FM - 24/3/2017

Esercizio 1 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad un potenziale centrale

$$V(|\mathbf{r}|) = V_0 \left(\frac{1}{10} \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{10} - \frac{1}{6} \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{6} \right) \tag{1}$$

dove $V_0, r_0 > 0$.

- Scrivere l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare.
- Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo L del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:
  1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L, si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
  2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.
  3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.

SOLUZIONI

- L'equazione del moto è

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{V_0}{r_0} \left(\left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{11} - \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{7} \right) \hat{\mathbf{r}}.$$

Per verificare la conservazione dell'energia meccanica, derivo rispetto al tempo $E = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(|\mathbf{r}|)$ e trovo

$$\dot{E} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \left[m\ddot{\mathbf{r}} - \frac{V_0}{r_0} \left(\left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{11} - \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{7} \right) \hat{\mathbf{r}} \right] = 0.$$

Per verificare la conservazione del momento angolare, derivo rispetto al tempo $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ e trovo:

$$\dot{\mathbf{L}} = m\dot{\mathbf{r}} \wedge \dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ è parallela a $\mathbf{r}$ stesso.

- 1. Il potenziale efficace è

$$
\begin{aligned}
V_{eff}(\rho) &= V_0\left[\frac{1}{10}\left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{6}\right] + \frac{L^2}{2m\rho^2} && (2)\\
&= V_0\Big[\frac{1}{10}\Big(\frac{r_0}{\rho}\Big)^{10} - \frac{1}{6}\Big(\frac{r_0}{\rho}\Big)^{6} + \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{r_0}{\rho}\Big)^{2}\Big], && (3)
\end{aligned}
$$

dove $\alpha = L^2/(mV_0 r_0^2)$ è un parametro a-dimensionale positivo.
I valori del potenziale efficace ai bordi del dominio di definizione sono

$$
\lim_{\rho\to 0} V_{eff}(\rho) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} V_{eff}(\rho) = 0 \tag{4}
$$

L'equazione del moto radiale è

$$
m\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho) \tag{5}
$$

e corrispondentemente l'energia meccanica totale si può riscrivere nella forma:

$$
E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho). \tag{6}
$$

Per trovare i valori critici dobbiamo studiare

$$
V'_{eff}(\rho) = -\frac{V_0}{r_0}\Big[\Big(\frac{r_0}{\rho}\Big)^{11} - \Big(\frac{r_0}{\rho}\Big)^{7} + \alpha\Big(\frac{r_0}{\rho}\Big)^{3}\Big] = -\frac{V_0}{r_0}\frac{\alpha t^2 - t + 1}{t^{11/4}}, \tag{7}
$$

dove $t := (\rho/r_0)^4$. Le radici di $V'_{eff}(\rho)$ sono quindi:

$$
t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha}, \tag{8}
$$

con $\alpha = L^2/(mV_0 r_0^2)$. Quindi al variare di L (o, equivalentemente, di α), V_{eff} può avere $0, 1$ o 2 punti critici. Più precisamente:

  - CASO 1, $\alpha < 1/4 \Leftrightarrow L^2 < \frac{mV_0 r_0^2}{4}$: la derivata ha due zeri nella variabile t, entrambi positivi. Quindi, ricordando la definizione di t e il fatto che i valori di ρ fisicamente accettabili sono quelli positivi, le scelte di $\rho > 0$ per cui V_{eff} si annulla sono due:

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= r_0 \sqrt[4]{\frac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha}},\\
\rho_2 &= r_0 \sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{1-4\alpha}}{2\alpha}},
\end{aligned} \tag{9}
$$

    ed è facile verificare che ρ_1 è un minimo locale, mentre ρ_2 è massimo locale.

- CASO 2, $\alpha = 1/4 \Leftrightarrow L^2 = \frac{mV_0 r_0^2}{4}$: esiste un solo punto critico, $t_0 = 1/(2\alpha) = \frac{mV_0 r_0^2}{2L^2}$, che corrisponde a

$$\rho_0 = r_0 \sqrt[4]{\frac{mV_0 r_0^2}{2L^2}}$$

  che è un punto di flesso;
- CASO 3, $\alpha > 1/4 \Leftrightarrow L^2 > \frac{mV_0 r_0^2}{4}$: non ci sono punti critici, ovvero il potenziale è monotono decrescente)

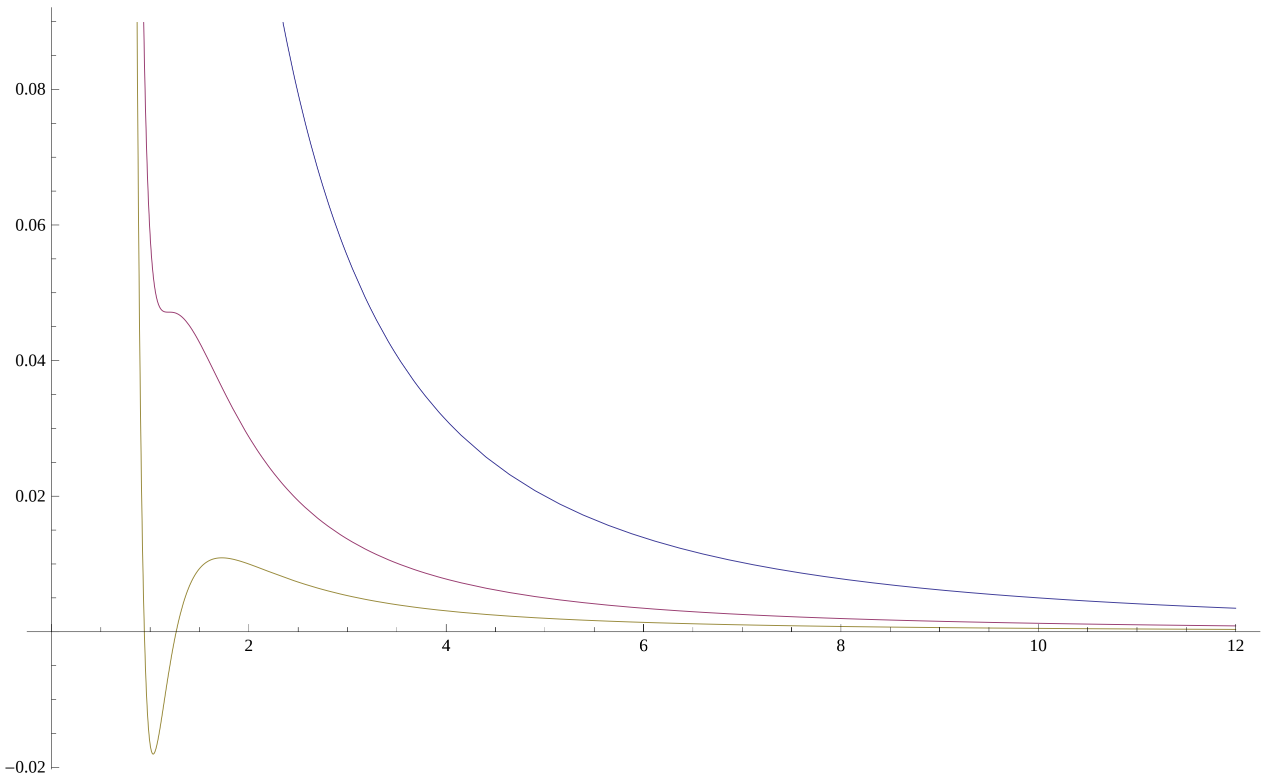

Figure 1: Grafico di V_{eff}, al variare del parametro α.

Il grafico del potenziale efficace, al variare del parametro α, è mostrato in Fig.1. Il grafico delle curve di livello è mostrato in figura solo per il primo caso.

La natura qualitativa del moto radiale dipende dal valore di α:

- nel caso 1, il sistema ammette due moti banali (sui due punti di equilibrio: $\rho(t) \equiv \rho_1$ e $\rho(t) \equiv \rho_2$), moti periodici non banali (se $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$), un moto limitato a-periodico (se $E = V_{eff}(\rho_2)$ e

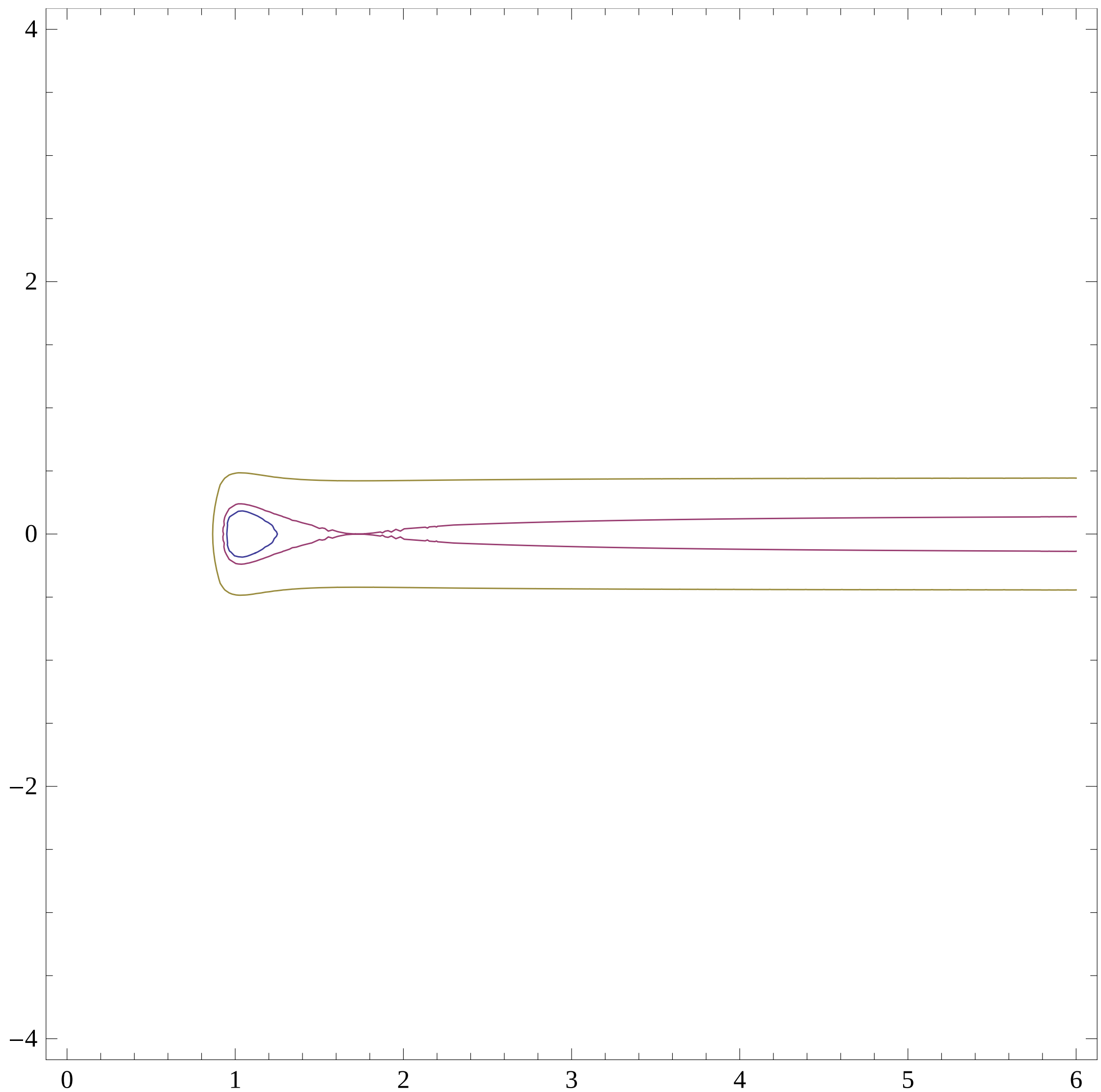

Figure 2: Esercizio 1 Grafico delle curve di livello nel caso di esistenza di moti periodici.

$\rho(0) < \rho_2$) e moti aperti (negli altri casi: in tali casi il moto diverge a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro, con l'eccezione del caso $E = V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) > \rho_2$, nel qual caso $\rho(t)$ tende a ρ_2 nel passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa).

- nel caso 2, il sistema ammette un moto banale (se $E = V_{eff}(\rho_0)$ e $\rho(0) = \rho_0$) e moti aperti (in tutti gli altri casi: in tali casi il moto diverge a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro, con l'eccezione del caso $E = V_{eff}(\rho_0)$ e $\rho(0) > \rho_0$, nel qual caso $\rho(t)$ tende a ρ_0 nel passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa).
- nel caso 3, il sistema ammette solo moti aperti, che divergono sia nel passato che nel futuro.

La soluzione per quadrature sul semipiano superiore dello spazio delle fasi ridotto radiale ($\dot{\rho} \geq 0$) con dato iniziale $\rho(0)$ a $t = 0$ è

$$\int_{\rho(0)}^{\rho(t)} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = t$$

e un'espressione analoga è valida come al solito per le porzioni di traiettoria nel semipiano inferiore dello spazio delle fasi ridotto.

L'unico caso in cui sono presenti moti periodici radiali non banali è $L^2 < \frac{mV_0 r_0^2}{4}$. In questo caso, se $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$, il sistema ammette moti radiali periodici di periodo T_0, che consistono in oscillazioni tra due punti di inversione ρ_- e ρ_+, definiti come le due radici di $E = V_{eff}(\rho)$ tali che $0 < \rho_- < \rho_1 < \rho_+ < \rho_2$. Inoltre, T_0 si può esprimere come integrale definito nella forma:

$$T_0 = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} \tag{10}$$

2. Dalla conservazione del momento angolare sappiamo che

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m\rho^2} \tag{11}$$

da cui otteniamo la soluzione

$$\theta(t) - \theta_0 = \int_0^t ds \frac{L}{m\rho(s)^2} \tag{12}$$

dove $\rho(t)$ è la soluzione per quadrature del moto radiale ottenuta sopra. Nel caso in cui il moto radiale corrisponde al moto banale $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$ su un punto di equilibrio, otteniamo quindi:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_{eq} t, \tag{13}$$

dove $\omega_{eq} = \frac{L}{m\rho_{eq}^2}$. Invece, nei casi, discusso sopra, in cui il moto radiale è periodico e non banale, la legge oraria di θ si può scrivere come sovrapposizione di due moti periodici di periodi $T_1 = 2\pi/\omega_1$ e $T_0 = 2\pi/\omega_0$:

$$\theta(t) = f(\omega_1 t)+g(\omega_0 t), \quad \text{dove} \quad f(\omega_1 t) = \theta_0+\omega_1 t \quad \text{e} \quad g(\omega_0 t) = \int_0^t ds \frac{L}{m\rho(s)^2} - \omega_1 t,$$

con T_0 il periodo del moto radiale ricavato al punto precedente, e

$$\omega_1 = \frac{2}{T_0} \int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}. \tag{14}$$

3. Un caso in cui il moto complessivo è sicuramente periodico è quello in cui $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$, nel qual caso il moto complessivo è circolare uniforme di periodo

$$T = 2\pi \frac{m\rho_{eq}^2}{L} \tag{15}$$

Se invece il moto radiale è periodico non banale di periodo T_0, la condizione necessaria affinché il moto complessivo sia periodico è che l'incremento della variabile angolare in un periodo T_0, $\Delta\theta = \omega_1 T_0$, con ω_1 definito in (24), sia multiplo razionale di 2π, i.e.,

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = 2\pi \frac{k}{n}, \tag{16}$$

per qualche $k, n \in \mathbb{Z}$, nel qual caso il moto complessivo è periodico di periodo $nT_0 = kT_1$. In caso contrario il moto complessivo è quasi-periodico e riempie densamente una regione bidimensionale dello spazio (sia dello spazio fisico che dello spazio delle fasi).

Esercizio 2 Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto ad un potenziale centrale

$$V(|\mathbf{r}|) = \left(-\frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{3|\mathbf{r}|^3} \right). \tag{17}$$

- Scrivere l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare.

- Al variare del modulo L del momento angolare, si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature. Più precisamente:

1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L, si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.
3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.
4. nei casi in cui il moto consiste in una caduta verso il centro, si discuta se il tempo di caduta è finito o infinito.

SOLUZIONE

- L'equazione del moto è
$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(-\frac{1}{|\mathbf{r}|^2} - \frac{1}{|\mathbf{r}|^4}\right)\hat{\mathbf{r}}.$$
Per verificare la conservazione dell'energia meccanica $E = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(|\mathbf{r}|)$ deriviamo rispetto al tempo, trovando:
$$\dot{E} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \left(\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} + \frac{1}{|\mathbf{r}|^4}\right)\hat{\mathbf{r}} = 0.$$
La conservazione del momento angolare si verifica come sopra (la dimostrazione è la stessa del caso generale di forze centrali).

1. Il potenziale efficace ha la forma:
$$V_{eff}(\rho) = -\frac{1}{\rho} - \frac{1}{3\rho^3} + \frac{L^2}{2\rho^2} \tag{18}$$
e consideriamo esplicitamente solo il caso $L \neq 0$. Prima di tutto notiamo che
$$\lim_{\rho\to 0} V_{eff}(\rho) = -\infty \qquad \lim_{\rho\to\infty} V_{eff}(\rho) = 0 \tag{19}$$
Cerchiamo i punti di equilibrio di tale potenziale
$$V'_{eff}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^4} - \frac{L^2}{\rho^3} = \frac{\rho^2 + 1 - \rho L^2}{\rho^4} \tag{20}$$
da cui $V'_{eff}(\rho) = 0$ nei punti $\rho_\pm = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4-4}}{2}$, se questi risultano positivi. Distinguiamo tre casi:

a) CASO $L^4 > 4$: le radici $\rho_\pm$ sono reali, distinte e positive, quindi esistono due punti di equilibrio per il moto radiale (instabile, nel caso di ρ_-, e stabile, nel caso di ρ_+). Il grafico di V_{eff} è in Fig.3. Il grafico delle curve di livello corrispondenti è in Fig.5.

b) CASO $L^4 = 4$: $\rho_+ = \rho_- > 0$, quindi esiste un unico punto di equilibrio per il moto radiale.

c) CASO $L^4 < 4$: non esistono punti di equilibrio per il moto radiale, e si vede che $V'_{eff}(\rho) < 0$, $\forall \rho > 0$. Il grafico di V_{eff} è in Fig.4.

Nel caso a), il grafico di V_{eff} ha una forma qualitativa leggermente diversa a seconda se $V_{eff}(\rho_-)$ è maggiore o minore di 0. In termini di L^4 tale condizione è equivalente a L^4 maggiore o minore di 16/3: se $L^4 > 16/3$ allora $V_{eff}(\rho_-) > 0$, se $4 < L^4 < 16/3$ allora $V_{eff}(\rho_-) < 0$. Il grafico in Fig.3 corrisponde a quest'ultimo caso (lo studio dei casi $L^4 \geq 16/3$ è lasciato al lettore). La natura qualitativa del moto è la seguente: il sistema ammette due moti banali (sui due punti di equilibrio: $\rho(t) \equiv \rho_-$ e $\rho(t) \equiv \rho_+$), moti periodici non banali (se $V_{eff}(\rho_+) < E < V_{eff}(\rho_-)$ e $\rho(0) > \rho_-$), moti critici, a-periodici, sulla separatrice (moto che cade sul centro nel passato e tende a ρ_- nel futuro – o viceversa – se $E = V_{eff}(\rho_-)$ e $\rho(0) < \rho_-$; moto limitato che tende a ρ_- sia nel passato che nel futuro, se $E = V_{eff}(\rho_-) > 0$ e $\rho(0) > \rho_-$; moto illimitato che tende a $+\infty$ nel futuro e a ρ_- nel passato – o viceversa – se $E = V_{eff}(\rho_-) \leq 0$ e $\rho(0) > \rho_-$) e moti aperti o di caduta sul centro (negli altri casi: in tali casi il moto diverge a $+\infty$ nel passato e cade nel centro nel futuro – o viceversa – con l'eccezione del caso $E < V_{eff}(\rho_-)$ e $\rho(0) < \rho_-$, nel qual caso $\rho(t)$ cade nel centro sia nel passato che nel futuro).

Nel caso b) tutti i moti con energia diversa da $V_{eff}(\rho_{eq})$, dove $\rho_{eq} = L^2/2$ è il punto di flesso orizzontale di V_{eff}, corrispondono a moti aperti, che o sono illimitati, o cadono sul centro della forza (se $E < 0$ i moti diversi a energia diversa da $V_{eff}(\rho_{eq})$ sono limitati e cadono sul centro sia nel passato che nel futuro; se $E \geq 0$ i moti cadono sul centro nel passato e divergono nel futuro, o viceversa). Se l'energia è uguale a $V_{eff}(\rho_{eq})$, allora oltre al moto banale $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$, il moto ammette un moto non banale che nel passato cade sul centro e nel futuro è asintotico a ρ_{eq}, o viceversa.

Nel caso c) tutti i moti sono aperti, e o sono illimitati, o cadono sul centro della forza (se $E < 0$ i moti sono limitati e cadono sul centro sia nel passato che nel futuro; se $E \geq 0$ i moti cadono sul centro nel passato e divergono nel futuro, o viceversa).

I moti periodici non banali del caso a) hanno periodo

$$T_0 = \sqrt{2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}} \tag{21}$$

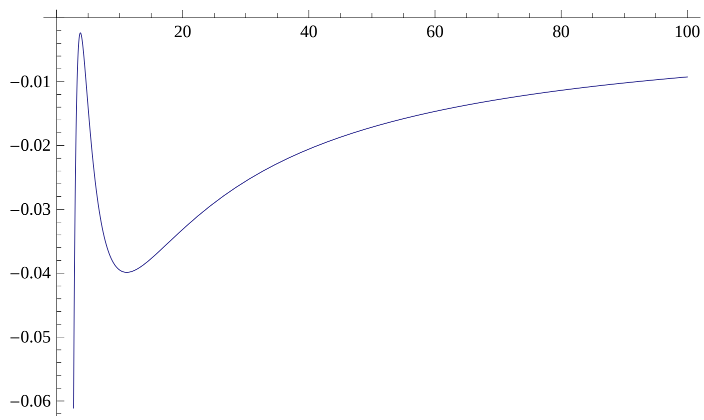

Figure 3: Esercizio 3. Grafico di V_{eff} , con $L^4 > 4$.

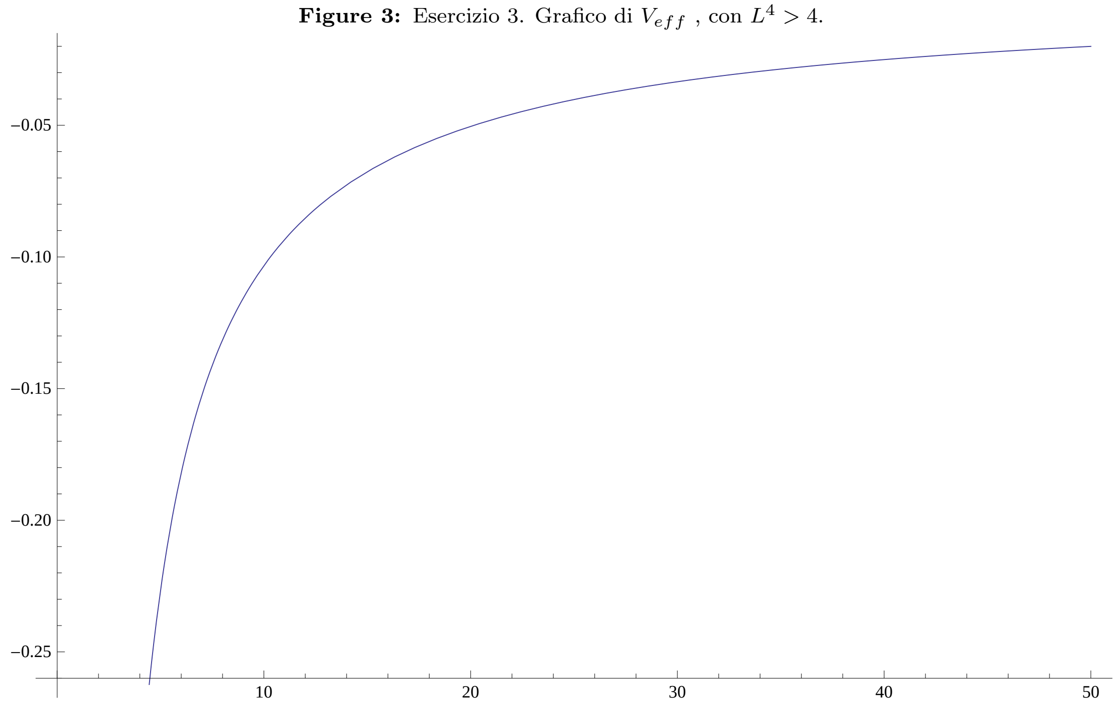

Figure 4: Esercizio 3. Grafico di V_{eff}, con $L^4 < 4$.

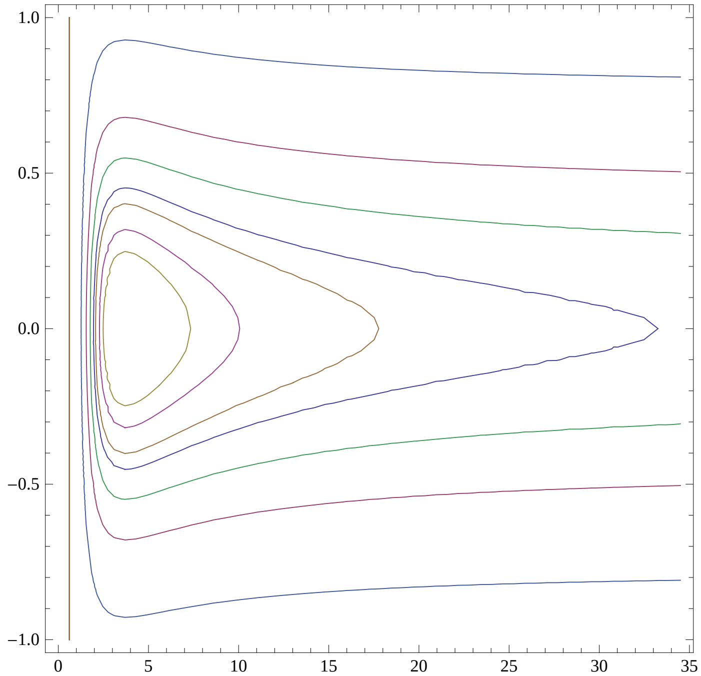

Figure 5: Esercizio 3. Curve di livello, con $L^4 > 4$.

dove i punti di inversione ρ_1, ρ_2 sono le due soluzioni dell'equazione $V_{eff} = E$ a destra di ρ_-.

La soluzione per quadrature del moto radiale, per porzioni di traiettoria che si svolgono, ad es., nel semipiano dello spazio delle fasi a $\dot{\rho} > 0$, ha la forma

$$\int_{\rho(0)}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}} = t$$

2. Se $\rho(t)$ è la soluzione per quadrature del moto radiale appena discussa,

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t ds \frac{L}{m\rho^2(s)} \tag{22}$$

Se il sistema parte con velocità radiale nulla su un punto di equilibrio ρ_{eq} (che può essere o ρ_- o ρ_+, nei casi discussi sopra) la soluzione si riduce a un moto "rettilineo uniforme",

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_{eq}^2} t \tag{23}$$

che corrisponde a un moto complessivo circolare uniforme di velocità angolare $\frac{L}{m\rho_{eq}^2}$.

Se $\rho(t)$ è periodico e non banale, la legge oraria di θ si può scrivere come sovrapposizione di due moti periodici di periodi $T_1 = 2\pi/\omega_1$ e $T_0 = 2\pi/\omega_0$:

$$\theta(t) = f(\omega_1 t) + g(\omega_0 t), \quad \text{dove} \quad f(\omega_1 t) = \theta_0 + \omega_1 t \quad \text{e} \quad g(\omega_0 t) = \int_0^t ds \frac{L}{m\rho(s)^2} - \omega_1 t,$$

con T_0 il periodo del moto radiale ricavato al punto precedente, e

$$\omega_1 = \frac{2}{T_0} \int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}. \tag{24}$$

3. Il moto complessivo è periodico o nel caso in cui il moto radiale sia banale ($\rho(t) \equiv \rho_{eq}$) o nei casi in cui $\rho(t)$ è periodica, e $\omega_1 T_0$è un multiplo razionale di 2π, come spiegato nel punto 3 dell'esercizio 1.

4. Consideriamo parametri e dati iniziali tali che il moto cada sul centro nel futuro. Il tempo di caduta è

$$t_c = \int_0^{\rho(0)} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{3\rho^3} - \frac{L^2}{2\rho^2})}}. \tag{25}$$

Per ρ piccoli la funzione integranda si comporta come $(\sqrt{3/2})\rho^{3/2}$, che è integrabile nell'origine, quindi il tempo di caduta è *finito* e la soluzione corrispondente *non* è globale nel tempo.

Esercizio 3 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad un potenziale centrale

$$V(|\mathbf{r}|) = V_0 \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{|\mathbf{r}|}{r_0} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{r}|}{r_0} \right)^2 \right) \tag{26}$$

con $V_0, r_0 > 0$.

- Scrivere l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare.
- Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo L del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:

  1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L, si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
  2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.

3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.
4. per i moti aperti, si discuta se la soluzione è globale o no.

SOLUZIONE

- L'equazione del moto è
$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{V_0}{r_0}\left[\left(\frac{|\mathbf{r}|}{r_0}\right)^3 - \frac{|\mathbf{r}|}{r_0}\right]\hat{\mathbf{r}}.$$
Per verificare la conservazione dell'energia meccanica, derivo rispetto al tempo $E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(|\mathbf{r}|)$ e trovo
$$\dot{E} = \dot{\mathbf{r}}\cdot\Big\{m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{V_0}{r_0}\Big[-\Big(\frac{|\mathbf{r}|}{r_0}\Big)^3 + \frac{|\mathbf{r}|}{r_0}\Big]\hat{\mathbf{r}}\Big\} = 0.$$
La conservazione del momento angolare si verifica come nel primo punto dell'Esercizio 1 (la dimostrazione è la stessa del caso generale di forze centrali).

1. Il potenziale efficace è:
$$V_{eff}(\rho) = V_0\left(-\frac{1}{4}\Big(\frac{\rho}{r_0}\Big)^4 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\rho}{r_0}\Big)^2\right) + \frac{L^2}{2m\rho^2}$$
Consideriamo solo il caso $L \neq 0$. Si ha
$$\lim_{\rho\to 0} V_{eff}(\rho) = \infty, \qquad \lim_{\rho\to\infty} V_{eff}(\rho) = -\infty \tag{27}$$
e
$$V'_{eff}(\rho) = \frac{V_0}{r_0}\left(-\frac{\rho^3}{r_0^3} + \frac{\rho}{r_0}\right) - \frac{L^2}{mr_0^3}\frac{r_0^3}{\rho^3} = -\frac{V_0}{r_0}\cdot\frac{t^3 - t^2 + \alpha}{t^{3/2}} \tag{28}$$
dove nell'ultima espressione $\alpha = \frac{L^2}{mV_0r_0^2}$ e $t = (\rho/r_0)^2$.

L'equazione $V'_{eff}(\rho) = 0$ ha soluzione (nelle variabili t) nei punti in cui la funzione $y = t^3 - t^2$ interseca la retta orizzontale $y = -\alpha < 0$. Si ricordi che solo le radici positive dell'equazione sono accettabili. Da uno studio del grafico di $t^3 - t^2$ risulta che l'equazione $t^3 - t^2 = -\alpha$ ammette: (1) due radici positive distinte, se $0 < \alpha < 4/27$; (2) due radici positive coincidenti, se $\alpha = 4/27$; (3) nessuna radice positiva, se $\alpha > 4/27$. Corrispondentemente, $V_{eff}(\rho)$ ammette, due/uno/zero punti di equilibrio (nel caso in cui il sistema ammette due punti di equilibrio, li chiameremo ρ_1 – punto di minimo locale, che è un equilibrio stabile – e ρ_2 – punto di massimo, che è un equilibrio instabile; nel caso in cui il sistema ammette un unico punto di equilibrio, lo chiameremo ρ_0 – punto di flesso orizzontale, che è un punto di equilibrio instabile).

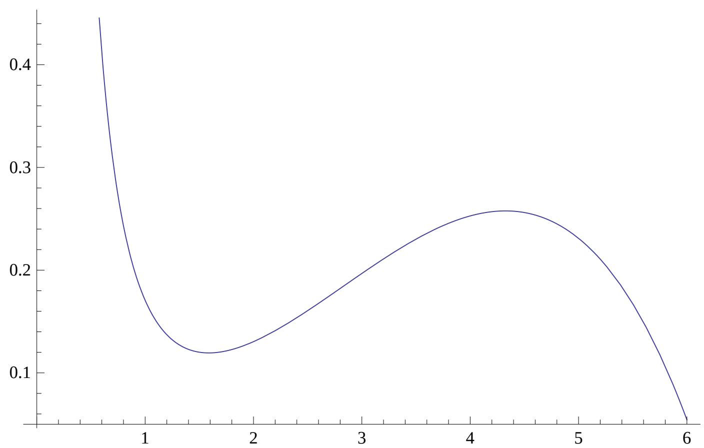

Figure 6: Esercizio 4. Grafico di V_{eff} nel caso $0 < \alpha < 4/27$, ovvero $0 < L < (2r_0/3)\sqrt{mV_0/3}$.

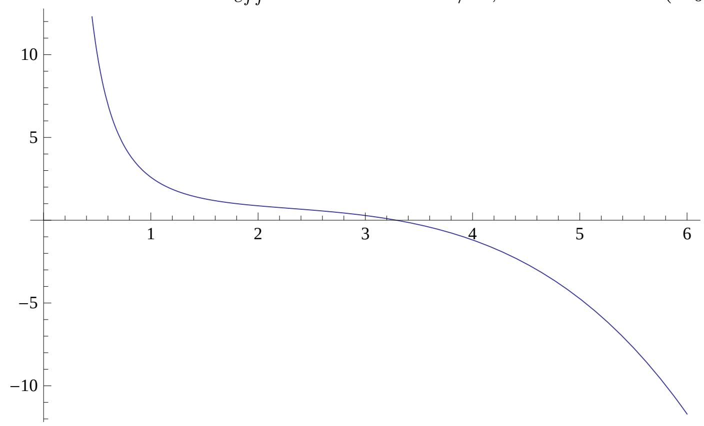

Figure 7: Esercizio 4. Grafico di V_{eff} nel caso $\alpha > 4/27$, ovvero $L > (2r_0/3)\sqrt{mV_0/3}$.

I diversi comportamenti qualitativi di V_{eff} sono mostrati in Fig.6 e Fig.7. Le curve di livello per il primo caso sono mostrate in Fig.8. Lo studio delle curve di livello negli altri casi è lasciato al lettore.

Nel caso $0 < \alpha < 4/27$, la natura qualitativa del moto radiale è la seguente: il sistema ammette due moti banali (sui due punti di equilibrio: $\rho(t) \equiv \rho_1$ e $\rho(t) \equiv \rho_2$), moti periodici non banali (se $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$), moti critici, a-periodici, sulla separatrice (moto limitato, che tende a ρ_2 sia nel passato che nel futuro, se $E = V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$; moto illimitato che tende a ρ_2 nel passato e a $+\infty$ nel futuro – o viceversa – se $E = V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) > \rho_2$), e moti aperti (in tutti gli altri casi: in tali casi il moto diverge a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro).

La discussione della natura qualitativa del moto nei casi $\alpha \geq 4/27$ è lasciata al lettore.

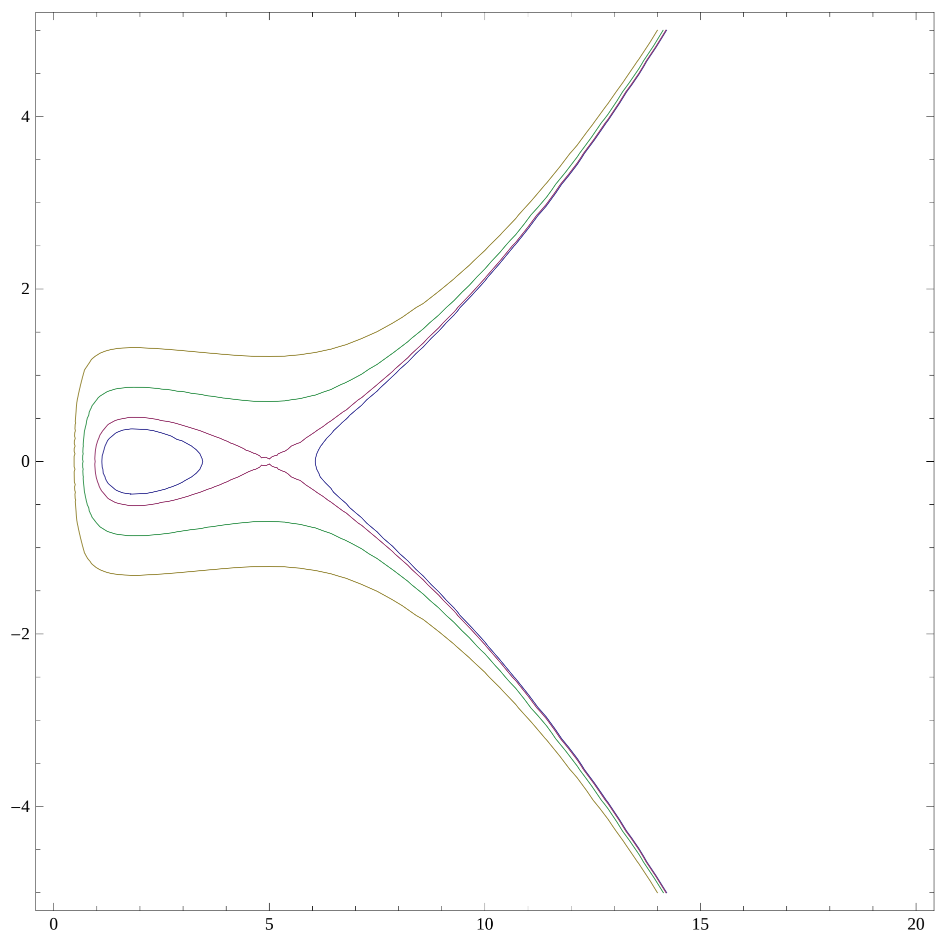

Figure 8: Esercizio 4. Curve di livello nel caso $0 < L < (2r_0/3)\sqrt{mV_0/3}$.

La soluzione per quadrature del moto radiale, per porzioni di traiettoria che si svolgono, ad es., nel semipiano dello spazio delle fasi a $\dot{\rho} > 0$, ha la forma

$$\int_{\rho(0)}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{2(E - V_{eff}(\rho))}} = t$$

Infine, nei casi in cui il moto radiale è periodico non banale (i.e., se $0 < \alpha < 4/27$, $V_{eff}(\rho_1) < E < V_{eff}(\rho_2)$ e $\rho(0) < \rho_2$), il periodo del moto radiale è

$$T_0 = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}} \tag{29}$$

dove $\rho_\pm$ sono i punti di inversione del moto, i.e., le due radici di $E = V_{eff}(\rho)$ con la proprietà che $0 < \rho - < \rho_1 < \rho_+ < \rho_2$.

2. Se $\rho(t)$ è la soluzione per quadrature del moto radiale discussa sopra, allora

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t ds \frac{L}{m\rho^2(s)} \tag{30}$$

Se il moto $\rho(t)$ è periodico banale, i.e., $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$, allora $\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_{eq}^2} t$. Se invece $\rho(t)$ è periodico non banale di periodo T_0, dove T_0 è stato calcolato sopra in termini di un integrale definito, allora $\theta(t)$ è la somma di un moto periodico di periodo T_0 a media nulla e di un moto a frequenza angolare costante, di periodo T_1 tale che:

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\pi} \int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}.$$

3. Il moto complessivo è sicuramente periodico nel caso in cui $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$, nel qual caso il moto complessivo è circolare uniforme. È periodico anche nel caso in cui il modo radiale sia periodico non banale di periodo T_0, e il rapporto tra T_0 e T_1 calcolato al punto precedente sia un numero razionale, i.e., nel caso in cui E ed L sono tali che

$$\frac{1}{\pi} \int_{\rho_-}^{\rho_+} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = \frac{m}{n}$$

per qualche $m, n \in \mathbb{N}$: in tal caso il moto complessivo è periodico di periodo $T = T_0 n = T_1 m$.

4. Consideriamo dati iniziali corrispondenti ad un moto aperto con $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = +\infty$. Supponiamo che al tempo 0 la distanza dal centro sia $\rho(0)$ e che $\dot{\rho}(t) > 0$ per ogni

$t > 0$. Il tempo per raggiungere l'infinito è

$$T_\infty = \int_{\rho(0)}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{2\left(E + V_0\left(+\frac{1}{4}\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2\right) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right)}} \tag{31}$$

Per ρ grandi la funzione integranda si comporta come $\sqrt{2/V_0}(r_0^2/\rho^2)$, che è integrabile all'infinito, quindi $T_\infty < +\infty$: in altre parole la soluzione diverge in tempo finito, e quindi il moto *non* esiste globalmente.