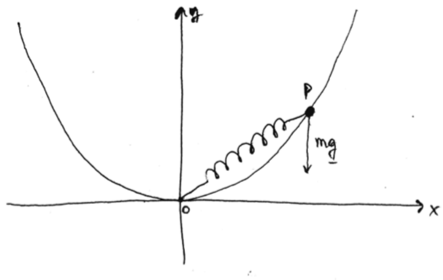
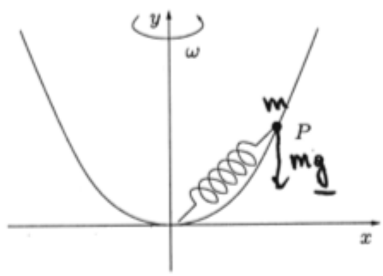
Tutorato 6 - MA/FM210 - 28/4/2017

<u>Esercizio 1.</u> Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi in un piano verticale (x, y), lungo il profilo di equazione $y = x^2/\ell_0$. Il punto è sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all'estremo di una molla di costante elastica $k > 0$.



- Si scriva la lagrangiana del sistema nelle coordinate adattate al vincolo.
- Si derivino le equazioni del moto sul vincolo.
- Si identifichi una grandezza conservata.
- Si risolva il moto per quadrature.

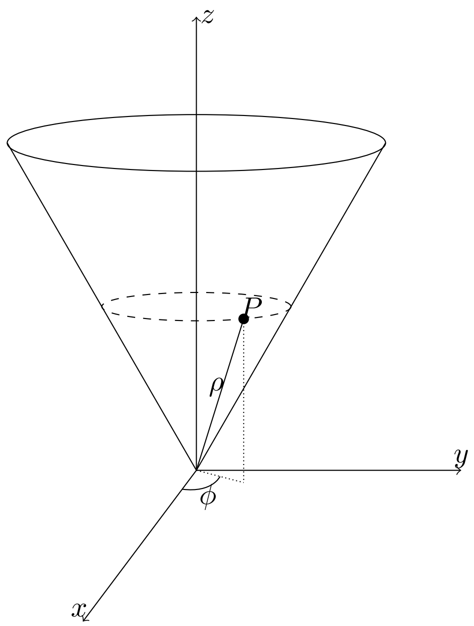
<u>Esercizio 2.</u> Si ripeta l'esercizio precedente, nel caso in cui il piano verticale (x, y) ruota intorno all'asse verticale con velocità angolare costante. In particolare, si identifichino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità al variare di ω.



<u>Esercizio 3.</u> Una particella di massa m e di carica q è vincolata a muoversi su una guida liscia di equazione $y = A \sin \omega x$. La particella è soggetta alla forza peso $\mathbf{F}_g = (0, -mg)$ e al campo elettrico $\mathbf{E} = (E_0 \cos \omega x, 0)$.

- Si determini l'energia potenziale associata alla forza attiva conservativa totale che agisce sulla particella.
- Si scriva la Lagrangiana del sistema.
- Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange.
- Si studi qualitativamente il moto (in particolare, si identifichino i punti di equilibrio, se ne studi la stabilità e si disegnino le traiettorie del sistema nell'opportuno piano delle fasi) e lo si risolva per quadrature.

<u>ESERCIZIO 4.</u> Una massa puntiforme m è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso sulla superficie di un cono di semiampiezza al vertice $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, con asse in direzione verticale e vertice rivolto verso il basso, come in figura.



1. Si parametrizzi la superficie del vincolo usando coordinate sferiche centrate nel vertice del cono: in altre parole, si scelgano come coordinate parametriche la distanza $\rho > 0$ dal vertice del cono, e l'angolo azimutale ϕ, come in figura.

2. Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema, usando come coordinate Lagrangiane le variabili $(\rho, \phi, \dot{\rho}, \dot{\phi})$. Si riconosca che ϕ è una variabile ciclica.

3. Si ricavino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange. Si riconosca che tale sistema di equazioni ammette due grandezze conservate: l'energia meccanica E e il momento coniugato alla variabile ciclica ϕ, che chiameremo A.

4. Usando la conservazione di A, si elimini la dipendenza di $\dot{\phi}$ nell'espressione di E, e si esprima cosí l'energia meccanica del sistema in funzione di $\rho, \dot{\rho}$ e di A nella forma $E = m\dot{\rho}^2/2 + V_{eff}(\rho)$: qual è l'espressione del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$?

5. Si studi il grafico di V_{eff} e si discuta la natura qualitativa del moto radiale.

6. Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo in termini di un integrale definito.