Tutorato 7 - MA/FM210 - 5/5/2017

<u>Esercizio 1.</u> Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1^2 + q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2)^3.$$

- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, e determinare l'energia (generalizzata) E, conservata dalle equazioni del moto.
- Sfruttando la simmetria della Lagrangiana, dimostrare che esiste un integrale primo distinto da E. Detto I tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli $I = c$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana ridotta.
- Si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale associato a tale Lagrangiana ridotta.

<u>Esercizio 2.</u> Si consideri un punto materiale di massa m in tre dimensioni, soggetto ad un campo di forze di energia potenziale $U(x, y, z)$ soddisfacente il seguente requisito: il potenziale è invariate rispetto al gruppo di trasformazioni g_α tale che:

$$g_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell\alpha \end{pmatrix},$$

dove $\ell > 0$ è una costante (con le dimensioni fisiche di lunghezza).

- Si trovi l'integrale primo corrispondente alla simmetria dell'energia potenziale e si determini un sistema di coordinate adattato (r, θ, z).
- Usando la simmetria del sistema si riduca di uno il numero di gradi di libertà, introducendo un'opportuna Lagrangiana ridotta. Determinare gli equilibri di tale Lagrangiana ridotta.
- Si studi la stabilità degli equilibri nel caso particolare:

$$V(r, \theta, z) = \frac{V_0}{r^2(\cos^2(\theta - z/\ell) - \sin^2(\theta - z/\ell))}.$$

<u>Esercizio 3.</u> Un'autobus si muove lungo il percorso rettilineo da A a B con accelerazione costante $a > 0$, partendo al tempo $t = 0$ da fermo dal punto A. Scelto un sistema di riferimento fisso κ con asse y lungo la direttrice AB, asse z lungo la verticale (così che $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$) e asse x scelto conseguentemente, si scelga un sistema di riferimento mobile K solidale all'autobus e si calcolino:

1. le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità da κ a K.

Durante il tragitto da A a B un passeggero all'interno dell'autobus lancia una pallina di massa m verso l'alto (nel suo sistema di riferimento).

2. Si scrivano le equazioni del moto della pallina nel sistema di riferimento K.
3. Si risolvano tali equazioni in corrispondenza del dato iniziale assegnato.
4. Si dica a che distanza dal punto di lancio ricade la pallina.

<u>Esercizio 4.</u> Al luna park, Luigi decide di salire sul galeone dei pirati, una giostra che oscilla nel modo seguente: il galeone è sospeso a un braccio meccanico di lunghezza R, contenuto nel piano verticale xz, che vincola il galeone a muoversi sulla circonferenza verticale di raggio R e centro nel fulcro del braccio. Se θ è l'angolo formato dal braccio con la verticale, la legge oraria del moto angolare è $\theta(t) = \sin(\kappa t)$, con $\kappa > 0$. Dopo aver scelto un sistema di riferimento fisso κ e uno in moto K solidale a Luigi mentre si trova sulla giostra (durante la corsa Luigi rimane legato e fermo su un sedile del galeone, che possiamo supporre coincidente con l'origine del sistema mobile), si scrivano:

1. le leggi di trasformazione delle coordinate e delle velocità da κ a K;

2. la forza totale, per componenti, a cui è soggetto Luigi (si assuma che Luigi sia soggetto, oltre che alle forze fittizie dovute al moto di K rispetto a κ, anche alla forza peso). Qual è l'intensità di tale forza al variare del tempo?