

## Tutorato extra - MA/FM210

### ESERCIZIO 1. Scritto di Meccanica Analitica del 3-2-15 prof. E. Scoppola

Un sistema meccanico, posto in un piano verticale  $\Pi$ , è costituito da un disco omogeneo di massa  $M$  e raggio  $R$  e da un'asta, rigida, sottile, omogenea,  $AB$  di lunghezza  $l = 2R$  e massa  $m$ . Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare su un asse verticale  $y$  del piano  $\Pi$ , l'asta ha l'estremo  $A$  incernierato senza attrito nel centro  $C$  del disco e l'estremo  $B$  è connesso ad un asse orizzontale  $x$  da una molla ideale di costante di richiamo  $K > 0$  e lunghezza a riposo nulla (in modo che la molla lavora sempre in posizione verticale). Si considerino come variabili lagrangiane l'angolo  $\theta$  che  $AB$  forma con l'asse  $x$  e la coordinata  $y$  del punto  $C$ .

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
2. Trovare i punti di equilibrio, discutendone la stabilità, al variare dei parametri.

### ESERCIZIO 2. Si consideri la trasformazione:

$$\begin{cases} Q = q^3 p^n \\ P = q^m p^l \end{cases}$$

1. Si fissino  $m, n, l$  affinché la trasformazione risultante sia canonica. Per tali valori dei parametri, si costruisca la trasformazione inversa, e si determinino i domini su cui le trasformazioni diretta e inversa sono definite.
2. Si usi la trasformazione trovata per integrare le equazioni di Hamilton di  $\mathcal{H}(q, p) = q^6 p^4$  con dati iniziali  $q(0) = 1, p(0) = 1$ . Più precisamente: si mappi l'Hamiltoniana assegnata in una nuova Hamiltoniana  $\tilde{H}(Q, P)$ , si scrivano e risolvano le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili, e poi si torni alle variabili  $(q, p)$  usando la trasformazione canonica inversa.