

Tutorato extra - MA/FM210

ESERCIZIO 1. Scritto di Meccanica Analitica del 3-2-15 prof. E. Scoppola

Un sistema meccanico, posto in un piano verticale Π , è costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un'asta, rigida, sottile, omogenea, AB di lunghezza $l = 2R$ e massa m . Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare su un asse verticale y del piano Π , l'asta ha l'estremo A incernierato senza attrito nel centro C del disco e l'estremo B è connesso ad un asse orizzontale x da una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla (in modo che la molla lavora sempre in posizione verticale). Si considerino come variabili lagrangiane l'angolo θ che AB forma con l'asse x e la coordinata y del punto C .

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
2. Trovare i punti di equilibrio, discutendone la stabilità, al variare dei parametri.

ESERCIZIO 2. Si consideri la trasformazione:

$$\begin{cases} Q = q^3 p^n \\ P = q^m p^l \end{cases}$$

1. Si fissino m, n, l affinché la trasformazione risultante sia canonica. Per tali valori dei parametri, si costruisca la trasformazione inversa, e si determinino i domini su cui le trasformazioni diretta e inversa sono definite.
2. Si usi la trasformazione trovata per integrare le equazioni di Hamilton di $\mathcal{H}(q, p) = q^6 p^4$ con dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 1$. Più precisamente: si mappi l'Hamiltoniana assegnata in una nuova Hamiltoniana $\tilde{H}(Q, P)$, si scrivano e risolvano le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili, e poi si torni alle variabili (q, p) usando la trasformazione canonica inversa.