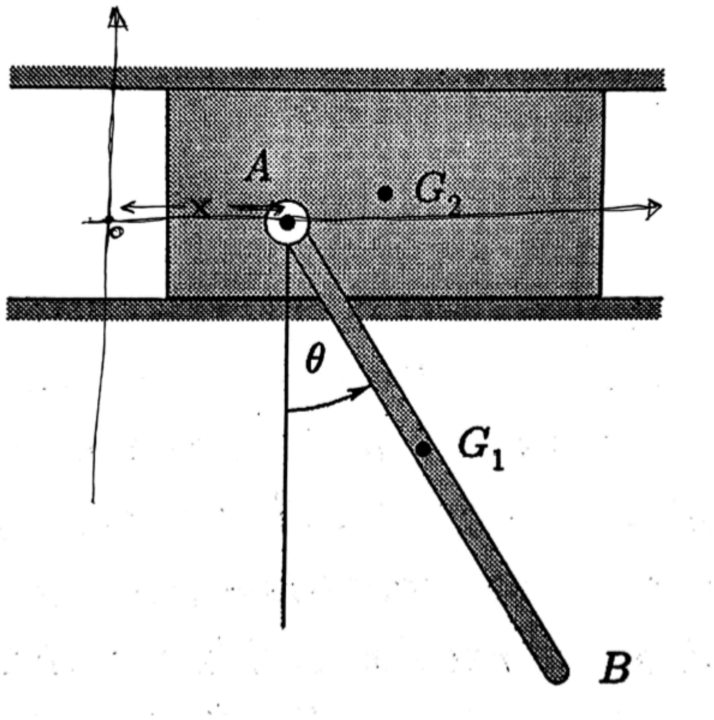
**Tutorato 7 - MA/FM210 - 15/05/2018**

<u>Esercizio 1.</u> Un sistema piano articolato a vincoli perfetti è costituito da una sbarra rigida rettilinea $AB$ omogenea pesante (di lunghezza $2\ell$ e massa $M$) collegata in $A$ con una cerniera ad una lamina (di massa $2M$) vincolata a muoversi di moto traslatorio rettilineo in direzione orizzontale. All'istante iniziale $t_0$, il sistema si trova in quiete (i.e., velocità nulla) con la sbarra in posizione orizzontale.




- Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane l'angolo $\theta$ indicato in figura e la posizione orizzontale $x$ di $A$ calcolata rispetto a $O$, come mostrato in figura.
- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema. Si riconosca che l'energia meccanica è conservata. Inoltre, si osservi che $x$ è una variabile ciclica e si calcoli il momento conservato corrispondente.
- Si calcolino i valori delle due grandezze conservate corrispondenti al dato iniziale assegnato. Usando la due leggi di conservazione, determinare le velocità dei baricentri $G_1$ della sbarra e $G_2$ della lamina nel primo istante $t_1$ successivo a $t_0$ nel quale la sbarra è verticale. Usando le equazioni di Eulero-Lagrange, si calcolino le accelerazioni di $G_1$ e $G_2$ all'istante $t_1$.
- Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità

**SOLUZIONE.** Se $(c_1, c_2)$ sono le due coordinate del vettore $\overrightarrow{AG_2}$, abbiamo

$$\begin{cases} x_{G_2} = x + c_1 \\ y_{G_2} = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{G_2} = \dot{x} \\ \dot{y}_{G_2} = 0 \end{cases}$$

Pertanto l'energia cinetica della lamina è $T_2 = M\dot{x}^2$. Inoltre

$$\begin{cases} x_{G_1} = x + \ell \sin\theta \\ y_{G_1} = -\ell\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{G_1} = \dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_{G_1} = \ell\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

Applicando il teorema di König otteniamo che l'energia cinetica dell'asta è (ricordando che il momento d'inerzia dell'asta attorno al baricentro è $I = \frac{1}{12}M(2\ell)^2 = \frac{1}{3}M\ell^2$):

$$T_1 = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) + \frac{1}{6}M\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{2}{3}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta.$$

La barretta è soggetta alla forza peso per cui: $V(\theta) = -Mg\ell\cos\theta$. La Lagrangiana è è quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2}M\dot{x}^2 + \frac{2}{3}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + Mg\ell\cos\theta.$$

- Abbiamo:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -M\ell\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta - Mg\ell\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{4}{3}M\ell^2\ddot{\theta} + M\ell\ddot{x}\cos\theta - M\ell\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = 3M\ddot{x} + M\ell\ddot{\theta}\cos\theta - M\ell\dot{\theta}^2\sin\theta$$

  Pertanto le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{4}{3}M\ell^2\ddot{\theta} + M\ell\ddot{x}\cos\theta - M\ell\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta = -M\ell\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta - Mg\ell\sin\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = 3M\ddot{x} + M\ell\ddot{\theta}\cos\theta - M\ell\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}$$

  L'energia meccanica è:

$$E = \frac{3}{2}M\dot{x}^2 + \frac{3}{2}M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta - Mg\ell\cos\theta.$$

  La verifica esplicita della conservazione di $E$ è lasciata al lettore. Notiamo inoltre che $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0$ pertanto la variabile $x$ è una variabile ciclica e quindi il momento conservato corrispondente,

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = 3M\dot{x} + M\ell\dot{\theta}\cos\theta,$$

  è una grandezza conservata: $p_x(t) \equiv I$.

- $\theta(t_0) = \frac{\pi}{2}$ e, poiché il sistema è in quiete, $\dot{x}(t_0) = 0$ e $\dot{\theta}(t_0) = 0$. Quindi $E = 0$ e $I = 0$. All'istante $t_1$ abbiamo $\theta(t_1) = 0$, e dunque, usando le leggi di conservazione di $E$ e $I$, troviamo che, all'istante $t_1$:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\dot{x}^2 + \frac{2}{3}\ell^2\dot{\theta}^2 + \ell\dot{\theta}\dot{x} - g\ell = 0 \\ 3\dot{x} + \ell\dot{\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ell}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{2}{3}\ell\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}^2\frac{\ell}{3} - g = 0 \\ \dot{x} = -\frac{\ell}{3}\dot{\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\theta}(t_1) = -\sqrt{\frac{2g}{\ell}} \\ \dot{x}(t_1) = \frac{1}{3}\sqrt{2g\ell} \end{cases}$$

  cosicché le velocità di $G_1$ e $G_2$ all'istante $t_1$ sono:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{G_1}(t_1) \\ \dot{y}_{G_1}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) + \ell\dot{\theta}(t_1)\cos\theta(t_1) \\ \ell\dot{\theta}(t_1)\sin\theta(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sqrt{2g\ell} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{G_2}(t_1) \\ \dot{y}_{G_2}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{2g\ell} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare le accelerazioni, rimpiazziamo i valori trovati per le velocità nelle equazioni di Eulero-Lagrange. Troviamo cosí che, al tempo $t_1$:

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\ell\ddot{\theta} + \ddot{x} = 0 \\ 3\ddot{x} + \ell\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}(t_1) = 0 \\ \ddot{x}(t_1) = 0 \end{cases}$$

Le accelerazioni di $G_1$ e $G_2$ al tempo $t_1$ sono quindi:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{G_1}(t_1) \\ \ddot{y}_{G_1}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t_1) + \ell\ddot{\theta}(t_1)\cos\theta(t_1) - \ell\dot{\theta}^2(t_1)\sin\theta(t_1) \\ \ell\ddot{\theta}(t_1)\sin\theta(t_1) + \ell\dot{\theta}^2(t_1)\cos\theta(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2g \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_{G_2}(t_1) \\ \ddot{y}_{G_2}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- I punti di equilibrio $(x^*, \theta^*)$ sono tali che i moti 'banali' $(x(t), \theta(t)) \equiv (x^*, \theta^*)$ risolvono le equazioni di Eulero-Lagrange. Troviamo $\sin\theta^* = 0$, e quindi $\theta^* = 0, \pi$. I punti di equilibrio sono quindi infiniti, della forma $(x^*, 0)$ o $(x^*, \pi)$, con $x^* \in \mathbb{R}$. Notiamo che il potenziale $V(\theta) = -Mg\ell\cos\theta$ ha un minimo in $\theta = 0$ e un massimo in $\theta = \pi$: i punti di equilibrio della forma $(x^*, 0)$ sono quindi stabili, mentre quelli della forma $(x^*, \pi)$ sono instabili.

**6.** *Un sistema olonomo è formato da:*

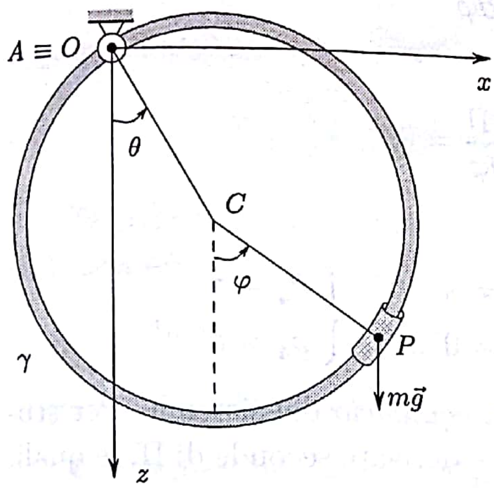



**Fig. 5.** Esercizio 6.

*a: una circonferenza materiale, omogenea, pesante $\gamma$, di massa $\mathfrak{M}$ centro $C$ e raggio $R$, vincolata con una cerniera il cui asse è orizzontale, passa per un punto $A$ di $\gamma$, ed è ortogonale al piano di $\gamma$ medesima;*

*b: un elemento materiale pesante $E$ di massa $m$ vincolato senza attrito a $\gamma$.*

*1 - Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità.*

*2 - Scrivere le equazioni di Lagrange, e riconoscere sotto quali condizioni sono possibili moti in cui l'elemento rimane in quiete rispetto alla circonferenza nella posizione diametralmente opposta ad $A$.*

*3 - Studiare le piccole oscillazioni intorno alla configurazione di equilibrio stabile.*

**Risoluzione**

Il sistema è olonomo a due gradi di libertà: scelta una terna di riferimento come in figura, conviene prendere come coordinate lagrangiane:

$\theta$ - l'anomalia che il raggio $\overline{CA}$ forma con la verticale, contata positivamente in verso antiorario rispetto all'asse $y$,

$\varphi$ - l'anomalia che il raggio $\overline{CP}$ forma con la verticale, equiorientata con $\theta$.

**1.** Poiché la sollecitazione agente sul sistema è conservativa, conviene cercare le configurazioni di equilibrio determinando i punti di stazionarietà dell'energia potenziale espressa in funzione delle coordinate lagrangiane. Tale energia è data da:

$$\Pi = -\mathfrak{M} g z_C - m g z_P + c;$$

esprimendo $z_C$ e $z_P$ in funzione delle coordinate lagrangiane:

$$(1) \qquad \begin{cases} z_C = R\cos\theta \\ z_P = R(\cos\theta + \cos\varphi), \end{cases}$$

L'espressione cercata per l'energia potenziale è data dalla

$$(2) \qquad \Pi(\theta,\varphi) = -(\mathfrak{M} + m) g R\cos\theta - m g R\cos\varphi.$$

Da questa si ha:

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = (\mathfrak{M} + m)gR\sin\theta \quad ; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgR\sin\varphi;$$

le soluzioni del sistema

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$$

che sono:

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta_2 = 0 \\ \varphi_2 = \pi \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta_3 = \pi \\ \varphi_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta_4 = \pi \\ \varphi_4 = \pi \end{cases},$$

individuano quindi le *quattro configurazioni di equilibrio* del sistema. Per studiare la stabilità di queste ultime, si calcolano le derivate seconde di $\Pi$, le quali, posto: $A = (\mathfrak{M} + m)gR > 0$, e: $B = mgR > 0$, sono:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = A\cos\theta \quad , \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial \varphi} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = B\cos\varphi \quad ;$$

i valori che queste assumono sui punti di stazionarietà danno luogo alle matrici hessiane:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \ \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}, \ \mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \ \mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}.$$

Dall'esame di tali matrici si riconosce immediatamente che:

**a** - la configurazione 1 è di *minimo relativo proprio* per $\Pi$ e quindi, per il teorema di Dirichlet, essa è di equilibrio stabile;

**b** - le configurazioni 2, 3 danno luogo a forme quadratiche indefinite, e la 4 ad una forma quadratica definita negativa e quindi, per il teorema di Liapounov, esse sono tutte e tre *di equilibrio instabile*.

**2.** L'energia cinetica del sistema è data dalla:

$$T = \frac{1}{2}J_y\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_P^2;$$

per poter scrivere le equazioni di Lagrange essa va espressa in funzione delle componenti lagrangiane dell'atto di moto $(\dot{\theta}, \dot{\varphi})$. Essendo: $x_P = R(\sin\theta + \sin\varphi)$, e: $z_P = R(\cos\theta + \cos\varphi)$, risulta

$$\dot{x}_P = R(\cos\theta\,\dot{\theta} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}) \quad ; \quad \dot{z}_P = -R(\sin\theta\,\dot{\theta} + \sin\varphi\,\dot{\varphi}),$$

e quindi:

$$v_P^2 = R^2[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\cos(\theta - \varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi}].$$

Per il teorema di Huyghens è:

$$J_y = J_C + \mathfrak{M}R^2 = \mathfrak{M}R^2 + \mathfrak{M}R^2 = 2\mathfrak{M}R^2$$

e quindi l'espressione lagrangiana dell'energia cinetica è data dalla:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}R^2[(2\mathfrak{M} + m)\dot\theta^2 + m\dot\varphi^2 + 2m\cos(\theta - \varphi)\dot\theta\dot\varphi]. \tag{4}$$

Derivando quest'ultima e ricordando le (3) si ottiene allora, per le equazioni di Lagrange, l'espressione:

$$\begin{aligned} L_\theta: &\quad (2\mathfrak{M}+m)R\ddot\theta + mR\cos(\theta-\varphi)\ddot\varphi + mR\sin(\theta-\varphi)\dot\varphi^2 + (\mathfrak{M}+m)g\sin\theta = 0 \\ L_\varphi: &\quad mR\cos(\theta-\varphi)\ddot\theta + mR\ddot\varphi - mR\sin(\theta-\varphi)\dot\theta^2 + mg\sin\varphi = 0. \end{aligned}$$

Per rispondere alla seconda parte della domanda, si osservi che i moti richiesti sono caratterizzati dal fatto che in ogni istante $t$ deve essere:

$$\theta(t) = \varphi(t). \tag{5}$$

Sostituendo nelle equazioni di Lagrange, si ottiene allora:

$$\begin{aligned} L'_\theta: &\quad 2(\mathfrak{M}+m)R\ddot\theta + (\mathfrak{M}+m)g\sin\theta = 0 \\ L'_\varphi: &\quad 2mR\ddot\theta + mg\sin\theta = 0, \end{aligned}$$

Le due equazioni di Lagrange si traducono dunque nella *medesima equazione differenziale* nell'*unica* incognita cinematica $\theta(t)$:

$$\ddot\theta + \frac{g}{2R}\sin\theta = 0.$$

I moti richiesti sono quindi possibili[4], ed in questo caso il sistema si comporta come un pendolo composto [Lezioni Cap. 13 n. 11].

**3.** La configurazione di equilibrio stabile coincide con l'origine delle coordinate lagrangiane; le forme ridotte dell'energia cinetica e del potenziale si calcolano immediatamente ottenendo:

$$T^\star = \frac{1}{2}R^2[(2\mathfrak{M}+m)\dot\theta^2 + m\dot\varphi^2 + 2m\dot\theta\dot\varphi] = \frac{1}{2}R^2[2\mathfrak{M}\dot\theta^2 + m(\dot\theta+\dot\varphi)^2]$$

$$U^\star = -\frac{gR}{2}[(\mathfrak{M}+m)\theta^2 + m\varphi^2].$$

[4] Essi si realizzano ogni volta che le condizioni iniziali siano compatibili con la restrizione (5), e cioè quando sia $\theta_0 = \varphi_0$, $\dot\theta_0 = \dot\varphi_0$

Le equazioni linearizzate di Lagrange sono allora:

$$L_\theta^*: \qquad (2\mathfrak{M}+m)R\ddot\theta \quad + \quad mR\ddot\varphi \quad + \quad (\mathfrak{M}+m)g\theta \quad = \quad 0$$

$$L_\varphi^*: \qquad mR\ddot\theta \quad + \quad mR\ddot\varphi \quad + \quad mg\varphi \quad = \quad 0.$$

A questo sistema di equazioni linearizzate possono essere applicati i metodi esposti nei n. 9-10 senza alcuna modifica; utilizzando gli stessi simboli è:

$$c_{hk} \equiv \begin{pmatrix} (2\mathfrak{M}+m)R & mR \\ mR & mR \end{pmatrix} \quad ; \quad a_{hk} \equiv \begin{pmatrix} -(\mathfrak{M}+m)g & 0 \\ 0 & -mg \end{pmatrix} \quad ;$$

il sistema (10.10) assume la forma:

$$(6) \qquad \begin{cases} [(2\mathfrak{M}+m)R\omega^2 - (\mathfrak{M}+m)g]B_1 + mR\omega^2 B_2 = 0 \\ mR\omega^2 B_1 + [mR\omega^2 - mg]B_2 = 0, \end{cases}$$

e l'equazione secolare associata diviene

$$|\mathbf{C}\omega^2 + \mathbf{A}| \equiv \begin{vmatrix} (2\mathfrak{M}+m)R\omega^2 - (\mathfrak{M}+m)g & mR\omega^2 \\ mR\omega^2 & mR\omega^2 - mg \end{vmatrix} = 0.$$

Sommando le due righe, e sostituendo la somma alla prima di esse, si ha:

$$|\mathbf{C}\omega^2 + \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2(\mathfrak{M}+m)R\omega^2 - (\mathfrak{M}+m)g & m(2R\omega^2 - g) \\ mR\omega^2 & mR\omega^2 - mg \end{vmatrix} =$$

$$= m(2R\omega^2 - g) \begin{vmatrix} \mathfrak{M}+m & m \\ R\omega^2 & R\omega^2 - g \end{vmatrix} =$$

$$= m(2R\omega^2 - g)[\mathfrak{M}R\omega^2 - (\mathfrak{M}+m)g] = 0.$$

Le soluzioni (gli autovalori) dell'equazione secolare sono dunque

$$\omega_1^2 = \frac{g}{2R} \quad , \quad \omega_2^2 = g\frac{\mathfrak{M}+m}{\mathfrak{M}R} \; .$$

Per $\omega = \omega_1$, il sistema (6) si riduce alla sola equazione:

$$B_1 - B_2 = 0.$$

Si ottiene dunque:

$$B_{11} = B_{21} = 1;$$

e le piccole oscillazioni corrispondenti sono espresse dalle funzioni:

$$\theta(t) = \varphi(t) = \cos(\omega_1 t + \psi_1) \; .$$

Per $\omega = \omega_2$ il sistema (6) si riduce alla sola equazione:

$$(\mathfrak{M} + m)B_1 + mB_2 = 0.$$

Si ottiene allora:

$$B_{12} = 1 \quad , \quad B_{22} = -\frac{\mathfrak{M} + m}{m};$$

in questo caso le piccole oscillazioni sono espresse dalle funzioni:

$$\begin{cases} \theta(t) = \cos(\omega_2 t + \psi_2) \\ \varphi(t) = -\dfrac{\mathfrak{M} + m}{m} \cos(\omega_2 t + \psi_2). \end{cases}$$

La soluzione generale del sistema delle equazioni linearizzate è allora:

$$\begin{cases} \theta(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) \\ \varphi(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) - A_2 \dfrac{\mathfrak{M} + m}{m} \cos(\omega_2 t + \psi_2). \end{cases}$$

Si osservi, infine, che in questo caso si possono ricavare direttamente, ed in maniera non troppo complicata, le *coordinate normali* [n. 10]. Infatti, sommando le $L^\star_\theta$ ed $L^\star_\varphi$ tra loro si ottiene:

(8) $$2(\mathfrak{M} + m)R\ddot{\theta} + 2mR\ddot{\varphi} + 2(\mathfrak{M} + m)Rg\theta + 2mRg\varphi = 0;$$

moltiplicando poi la $L^\star_\varphi$ per $(\mathfrak{M} + m)$, e sottraendola alla $L^\star_\theta$ moltiplicata per $m$, si ha:

(9) $$\mathfrak{M} m R(\ddot{\theta} - \ddot{\varphi}) + m(\mathfrak{M} + m)g(\theta - \varphi) = 0.$$

La forma di queste equazioni suggerisce immediatamente le combinazioni che esprimono le coordinate normali:

$$x_1 = (\mathfrak{M} + m)\theta + m\varphi \quad , \quad x_2 = \theta - \varphi.$$

Le (8) e (9) sono effettivamente due equazioni differenziali autonome, la prima nell'incognita $x_1(t)$, la seconda nell'incognita $x_2(t)$:

(10) $$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{g}{2R} x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + g\dfrac{\mathfrak{M} + m}{\mathfrak{M} R} x_2 = 0 \end{cases}$$

Si ritrovano, naturalmente, i moti armonici con le pulsazioni $\omega_1$ ed $\omega_2$ già determinate con l'altro metodo.

Quindi l'energia cinetica ha la forma:

$$T = \frac{3}{8}\mathfrak{M}R^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\Big[\Big(\frac{1}{2}R\dot\theta + \dot\xi\Big)^2 + \xi^2\dot\theta^2\Big] \tag{3}$$

**4.** Dalle (3) e (2) si ha immediatamente:

$$T^\star = T\Big|_{(0,0)} = \frac{3}{8}\mathfrak{M}R^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\Big(\frac{1}{2}R\dot\theta + \dot\xi\Big)^2$$

$$U^\star = -\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(\mathfrak{M}+m)gR\theta^2 + 2mg\theta\xi + k\xi^2\Big]$$

quindi

$$\frac{\partial T^\star}{\partial\dot\theta} = \frac{3}{4}\mathfrak{M}R^2\dot\theta + \frac{1}{2}m\Big(\frac{1}{2}R\dot\theta + \dot\xi\Big)R \quad , \quad \frac{\partial U^\star}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{M}+m)gR\theta - mg\xi$$

$$\frac{\partial T^\star}{\partial\dot\xi} = m\Big(\frac{1}{2}R\dot\theta + \dot\xi\Big) \quad , \quad \frac{\partial U^\star}{\partial\xi} = -mg\theta - k\xi$$

e in definitiva

$$L^\star_\theta : \quad \frac{1}{4}(3\mathfrak{M}+m)R^2\ddot\theta + \frac{1}{2}mR\ddot\xi + \frac{1}{2}(\mathfrak{M}+m)gR\theta + mg\xi = 0$$

$$L^\star_\xi : \quad \frac{1}{2}mR\ddot\theta + m\ddot\xi + mg\theta + k\xi = 0,.$$

## Esame del *27 giugno 1994*

*Un disco rigido, omogeneo, pesante, di massa $\mathfrak{M}$ e raggio $R$, è vincolato ad appartenere ad un piano verticale $\pi$ in modo tale che il punto $A$ del suo bordo si mantenga sempre sulla retta verticale $a$ di $\pi$.*

*Sul punto $B$ del disco, diametralmente opposto ad $A$, agisce una forza elastica $\vec f = k\overrightarrow{BO}$ con centro il punto $O$ di $a$, e $k = \lambda\mathfrak{M}g/R$ $(\lambda > 0)$.*

*Scelta come terna di riferimento la terna $RC(Oxyz)$ come in figura, e scelte come coordinate lagrangiane l'ascissa $z$ di $A$ e l'anomalia $\theta$ che $\overline{AB}$ forma con la verticale discendente, si chiede:*

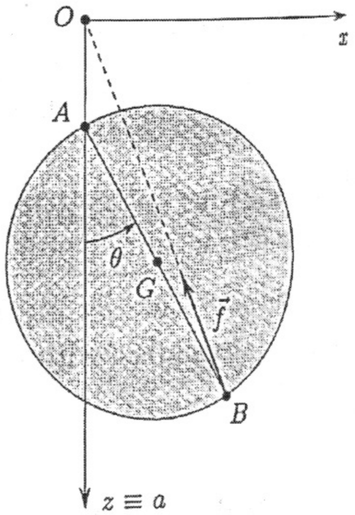



**Fig. 11.** Esame del 27 giugno 1994.

**Domande:**

1 – *determinare le posizioni di equilibrio del disco e studiarne la stabilità;*

2 – *scrivere le equazioni di Lagrange;*

3 – *posto che il disco venga abbandonato con atto di moto nullo, all'istante $t_0$, nella posizione $\mathcal{P}$ $(\theta = 0,\ z = R)$, determinare l'accelerazione del suo baricentro in tale istante.*

**Cenni di risoluzione.**

**1.**

$$(1) \qquad \begin{cases} x_G = R\sin\theta \\ z_G = z + R\cos\theta \end{cases} ; \begin{cases} x_B = 2R\sin\theta \\ z_B = z + 2R\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\overline{BO}|^2 = z^2 + 4Rz\cos\theta + 4R^2 .$$

*Potenziale:*

(*) $$U(\theta, z) = \mathfrak{M}g(z + R\cos\theta) - \frac{1}{2}\frac{\lambda\mathfrak{M}g}{R}(z^2 + 4Rz\cos\theta) + c$$

*Ricerca dei punti estremanti:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial\theta} &= -\mathfrak{M}gR\sin\theta + 2\lambda\mathfrak{M}gz\sin\theta \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \mathfrak{M}g - \lambda\frac{\mathfrak{M}g}{R}z - 2\lambda\mathfrak{M}g\cos\theta \end{aligned}\right\} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} (2\lambda z - R)\sin\theta = 0 \\ \lambda z = R - 2\lambda R\cos\theta \end{cases}$$

Prendendo: $\sin\theta = 0$, si ottengono le due soluzioni

$$P_1 \equiv \left(\theta = 0, z = \frac{R}{\lambda} - 2R\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_4 \equiv \left(\theta = \pi, z = \frac{R}{\lambda} + 2R\right)$$

Prendendo invece: $2\lambda z - R = 0$, si ricava $\cos\theta = \frac{1}{4\lambda}$. Se è $\lambda > \frac{1}{4}$ si ottengono due ulteriori soluzioni: $\mathcal{P}_{2,3} \equiv (0, \bar\theta)$ con $\bar\theta = \pm\arccos\frac{1}{4}\lambda$. Se invece è $\lambda < \frac{1}{4}$ non si ottengono altre soluzioni perchè non esiste alcun angolo per il quale sia $\cos\theta = \frac{1}{4\lambda}$; se infine è $\lambda = \frac{1}{4}$ si ottiene $\cos\theta = 1 \Longrightarrow \theta = 0$ soluzione già considerata.

*Stabilità:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -\mathfrak{M}gR\cos\theta + 2\lambda\mathfrak{M}gz\cos\theta \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial z} = 2\lambda\mathfrak{M}g\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\lambda\frac{\mathfrak{M}g}{R}$$

*Stabilità di $\mathcal{P}_1$:*

$$\mathbf{H}(\mathcal{P}_1) = \begin{pmatrix} -\lambda\dfrac{\mathfrak{M}g}{R} & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}gR(1-4\lambda) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \text{stabile per} & \lambda > \frac{1}{4} \\ \text{instabile per} & \lambda < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Per $\lambda = \frac{1}{4}$ la forma quadratica corrispondente ad $\mathbf{H}(\mathcal{P}_1)$ è semidefinita negativa e quindi non si può decidere sulla stabilità di $\mathcal{P}_1$ dal solo esame della matrice hessiana.

(*) Osservazione: nella notazione seguita durante il corso l'energia potenziale è $-U(\theta, z)$

*Stabilità di $\mathcal{P}_4$:*

$$\mathbf{H}(\mathcal{P}_4) = \begin{pmatrix} -\lambda\dfrac{\mathfrak{M}g}{R} & 0 \\ 0 & -\mathfrak{M}gR(1+4\lambda) \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{stabile } \forall\,\lambda$$

*Stabilità di $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$:*

$$\mathbf{H}(\mathcal{P}_2) = \mathbf{H}(\mathcal{P}_3) = \begin{pmatrix} -\lambda\mathfrak{M}g & 2\mathfrak{M}g\sin\bar\theta \\ 2\mathfrak{M}g\sin\bar\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo $|\mathbf{H}(\mathcal{P}_2)| = |\mathbf{H}(\mathcal{P}_3)| < 0$ le forme quadratiche corrispondenti sono indefinite e quindi, per il teorema di Liapounov, le due posizioni $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_3$, quando esistono, sono posizioni di equilibrio instabile.

**2.** Da (1) si ha:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \dot x_G = R\dot\theta\cos\theta \\ \dot z_G = \dot z - R\dot\theta\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow v_G^2 = \dot z^2 + R^2\dot\theta^2 - 2R\dot z\dot\theta\sin\theta$$

e quindi, utilizzando il teorema di König:

$$T = \frac{1}{2}\mathfrak{M}(\dot z^2 + R^2\dot\theta^2 - 2R\dot z\dot\theta\sin\theta) + \frac{1}{4}\mathfrak{M}R^2\dot\theta^2$$

*Equazioni di Lagrange*:

$$L_\theta : \quad \frac{3}{2}\mathfrak{M}R^2\ddot\theta - \mathfrak{M}R\ddot z\sin\theta = -\mathfrak{M}gR\sin\theta + 2\lambda\mathfrak{M}gz\sin\theta$$

$$L_z : \quad \mathfrak{M}\ddot z - \mathfrak{M}R\ddot\theta\sin\theta - \mathfrak{M}R\dot\theta^2\cos\theta = \mathfrak{M}g - \lambda\frac{\mathfrak{M}g}{R}z - 2\lambda\mathfrak{M}g\cos\theta.$$

**3.** Da (2) si ha:

$$\begin{cases} \ddot x_G = R\ddot\theta\cos\theta - R\dot\theta^2\sin\theta \\ \ddot z_G = \ddot z - R\ddot\theta\sin\theta - R\dot\theta^2\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot x_G(t_0) = R\ddot\theta(t_0) \\ \ddot z_G(t_0) = \ddot z(t_0) \end{cases}.$$

Dalle equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} \ddot\theta(t_0) = 0 \\ \ddot z(t_0) = \mathfrak{M}g(1-3\lambda) \end{cases} \Longrightarrow \vec a_G(t_0) \equiv (0, 0, \mathfrak{M}g(1-3\lambda)).$$

## Complementi

**1.** Rimane da stabilire soltanto il carattere della posizione $\mathcal{P}_1$ ($\equiv \mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P}_3$) per $\lambda = \frac{1}{4}$.

Il potenziale, per $\lambda = \frac{1}{4}$, vale:

$$U(\theta, z) = \mathfrak{M}g(z + R\cos\theta) - \frac{\mathfrak{M}g}{8R}(z^2 + 4Rz\cos\theta) + c,$$

## ☰ Esame del *5 giugno 1996*

*Un sistema olonomo è costituito da:*

a - *una lamina rettangolare $ABCD$ di lati $2\ell$ e $4\ell$, omogenea, pesante di massa $\mathfrak{M}$, vincolata a muoversi nel piano verticale $(x, y)$ mantenendo uno dei suoi lati maggiori sovrapposto all'asse $x$;*

b - *una sbarra $ST$, rettilinea, omogenea, pesante, di massa $m$ e lunghezza $\ell$, i cui estremi sono vincolati a scorrere (senza attrito) sugli assi del rettangolo.*

*Sul vertice $A$ della lamina, agisce una forza elastica $\vec{f} = k\overrightarrow{AK}$ di centro il punto $K \equiv (0, 3\ell)$.*

*Si assumano come coordinate lagrangiane l'ascissa $x$ del punto $A$ e l'anomalia di rotazione $\theta$ della sbarra rispetto alla verticale ascendente.*

**Domande:**

1 – *Scrivere le equazioni di Lagrange.*

2 – *Posto $\mathfrak{M} = m$ e $k = 3\mathfrak{M}g/2\ell$, studiare le piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio stabile $\theta = 0$, $x = 0$.*

3 – *Nelle ipotesi del punto 2, supposto che all'istante $t_0$ la configurazione del sistema sia quella corrispondente a $x = 0$, $\theta = \pi/4$, e l'atto di moto sia nullo, determinare nel medesimo istante le due forze vincolari $\vec{r}_T$ ed $\vec{r}_S$ che la lamina esercita sugli estremi della sbarra.*

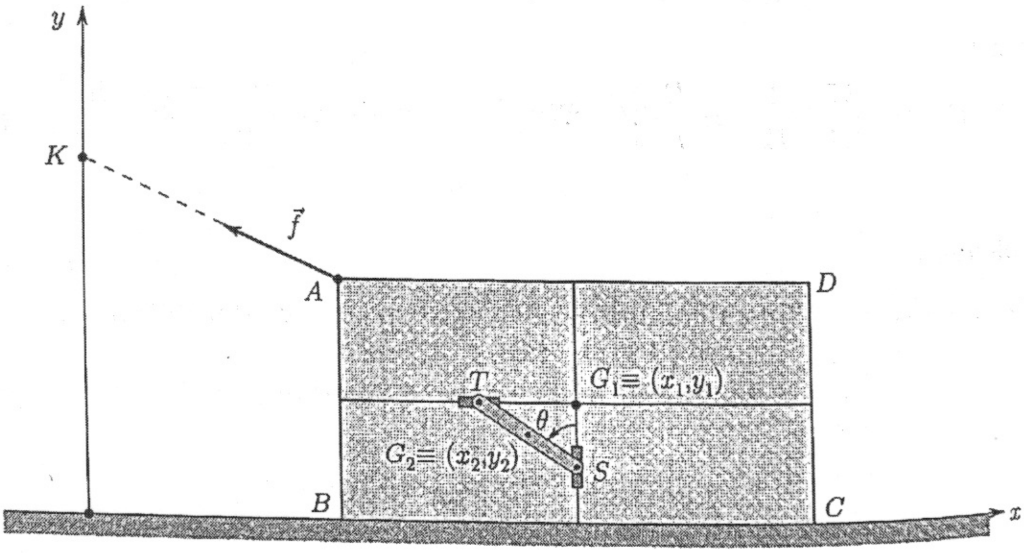



**Fig. 37.** Esercizio del 5 giugno 1996

### Cenni di risoluzione

1. Indicati con $G_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $G_2 \equiv (x_2, y_2)$ i baricentri della lamina e della

sbarra rispettivamente, si ha:

$$\begin{cases} x_1 = x + 2\ell \\ y_1 = \ell \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} \\ \dot{y}_1 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \qquad \begin{cases} x_2 = x + 2\ell - \dfrac{\ell}{2}\sin\theta \\ y_2 = \ell - \dfrac{\ell}{2}\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x} - \dfrac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_2 = \dfrac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}.$$

*Potenziale*:

(*) $$U(x,\theta) = -\frac{1}{2}k|\overline{Ak}|^2 - mgy_2 + c = -\frac{1}{2}kx^2 + mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + c'$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta\,.$$

*Energia cinetica*: applicando separatamente alla lamina e alla sbarra il teorema di König

$$T = \frac{1}{2}\mathfrak{M}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathfrak{M} + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\Big(\frac{1}{3}\ell^2\dot{\theta}^2 - \ell\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\Big)$$

*Equazioni di Lagrange*:

$$L_x: \quad (\mathfrak{M} + m)\ddot{x} - \frac{1}{2}m\ell\ddot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m\ell\dot{\theta}^2\sin\theta = -kx$$

$$L_\theta: \quad \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m\ell\ddot{x}\cos\theta = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta\,.$$

2. Posto $\mathfrak{M} = m$, $k = 3mg/2\ell$:

$$\begin{matrix} T^\star = m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \dfrac{1}{2}m\ell\dot{\theta}\dot{x} \\ U^\star = -\dfrac{3}{4}\dfrac{mg}{\ell}x^2 - \dfrac{1}{4}mg\ell\theta^2 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} L_x^\star: \; 4\ell\ddot{x} - \ell^2\ddot{\theta} = -3gx \\ L_\theta^\star: \; -3\ddot{x} + 2\ell\ddot{\theta} = -3g\theta\,. \end{matrix}$$

Ponendo nelle equazioni ridotte:

$$x(t) = B_1\cos(\omega t + \varphi) \quad , \quad \theta(t) = B_2\cos(\omega t + \varphi)$$

si ottiene

$$(2) \qquad \begin{cases} (3g - 4\ell\omega^2)B_1 + \ell^2\omega^2 B_2 = 0 \\ 3\omega^2 B_1 + (3g - 2\ell\omega^2)B_2 = 0 \end{cases}$$

(*) Osservazione: nella notazione seguita durante il corso l'energia potenziale è $-U(x,\theta)$

L'equazione secolare è:

$$(3g - 4\ell\omega^2)(3g - 2\ell\omega^2) - 3\ell^2\omega^4 = 0$$

cioè

$$5\ell^2\omega^4 - 18\ell\omega^2 + 9g^2 = 0 \implies \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{3g}{5\ell} \\ \omega_2^2 = \dfrac{3g}{\ell} \end{cases}$$

e sostituendo nelle equazioni (2) questi valori

$$\omega = \omega_1 : \qquad B_1 = -\frac{\ell}{3}B_2 \quad \text{cioè} \quad B_{11} = \lambda_1\ell \quad , \quad B_{21} = 3\lambda_1$$

$$\omega = \omega_2 : \qquad B_1 = -\ell B_2 \quad \text{cioè} \quad B_{12} = \lambda_2\ell \quad , \quad B_{22} = \lambda_2$$

Le piccole oscillazioni sono descritte da:

$$\begin{cases} x(t) = -\lambda_1\ell\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \ell\lambda_2\cos(\omega_2 t + \varphi_1) \\ \theta(t) = 3\lambda_1\cos(\omega_1 t + \varphi_2) + \lambda_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

con $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ arbitrari.

**3.** Dalla I equazione cardinale della dinamica, relativa alla sbarretta, considerata nell'istante iniziale si ha:

$$m\vec{a}_G(t_0) = m\vec{g} + \vec{r}_T + \vec{r}_S \quad , \quad \begin{cases} \vec{r}_T \in \mathcal{F}^v(T) \iff (\vec{r}_T)_x = 0 \\ \vec{r}_S \in \mathcal{F}^v(S) \iff (\vec{r}_S)_y = 0 \end{cases}$$

e proiettando sugli assi $x, y$ si ha:

(3) $$m\ddot{x}_2(t_0) = (\vec{r}_S)_x \quad , \quad m\ddot{y}_2(t_0) = -mg + (\vec{r}_T)_y$$

I valori delle componenti dell'accelerazione del baricentro $G_2$ della sbarretta si ottengono dalle (1):

(4) $$\begin{cases} \ddot{x}_2 = \ddot{x} - \frac{1}{2}\ell\ddot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}\ell\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y}_2 = \frac{1}{2}\ell\ddot{\theta}^2\sin\theta + \frac{1}{2}\ell\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}$$

e nell'istante iniziale $t_0$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2(t_0) = \ddot{x}(t_0) - \dfrac{\ell}{4}\sqrt{2}\ddot{\theta}(t_0) \\ \ddot{y}_2(t_0) = \dfrac{\ell}{4}\sqrt{2}\ddot{\theta}(t_0)\,. \end{cases}$$

Le equazioni di Lagrange in corrispondenza all'istante iniziale sono:

$$L_x\big|_{t_0} : \quad 2\ddot{x}(t_0) - \frac{\sqrt{2}}{4}\ell\ddot{\theta}(t_0) = 0$$

$$L_\theta\big|_{t_0} : \quad -\frac{\sqrt{2}}{4}\ddot{x}(t_0) + \frac{1}{3}\ell\ddot{\theta}(t_0) = -\frac{\sqrt{2}}{4}g$$

da queste si determinano i valori

$$\ddot{x}(t_0) = -\frac{3}{13}g \quad , \quad \ddot{\theta}(t_0) = -\frac{12\sqrt{2}}{13}\frac{g}{\ell} .$$

Sostituendo nelle (4) si ottengono i valori assunti dalle componenti cartesiane dell'accelerazione di $G_2$:

$$\ddot{x}_2(t_0) = \frac{3}{13}g \quad , \quad \ddot{y}_2(t_0) = -\frac{6}{13}g$$

basta sostituire nelle (3) per avere il risultato:

$$\vec{r}_S(t_0) = \frac{3}{13}mg\vec{e}_1 \in \mathcal{F}^v(S) \qquad , \qquad \vec{r}_T(t_0) = \frac{7}{13}mg\vec{e}_2 \in \mathcal{F}^v(T) .$$

## ≡ Esame del *19 giugno 1996*

*Un sistema olonomo è costituito da:*

a - *una lamina quadrata, omogenea, pesante di massa $\mathfrak{M}$ e lato $2\ell$, vincolata a muoversi nel piano verticale $(x, z)$ mantenendo uno dei suoi lati sovrapposto all'asse orizzontale $x$;*

b - *una sbarra $AB$, rettilinea, omogenea, pesante, di massa $m$ e lunghezza $\ell$, vincolata a muoversi nel piano $x, z$ mantenendo l'estremo $A$ sovrapposto al baricentro geometrico $C$ della lamina (vincolo di cerniera cilindrica che lega la sbarra alla lamina).*

*Sull'estremo $B$ della sbarra agisce una forza elastica $\vec{f} = k\overrightarrow{BD}$ di centro il punto $D \equiv (0, -3\ell)$.*

*Si assumano come coordinate lagrangiane l'ascissa $x$ delpunto $C$ e l'anomalia di rotazione $\theta$ della sbarra rispetto alla verticale discendente.*

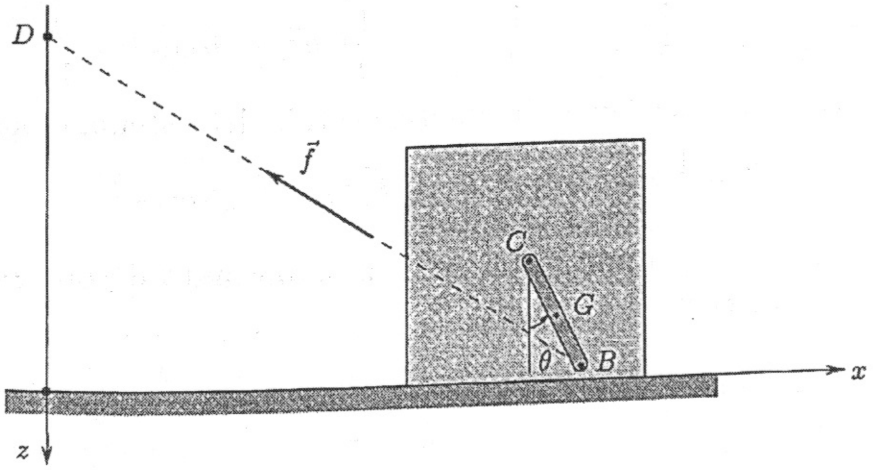



Fig. 38. Posizione generica del sistema dell'esercizio del 19 giugno 1996.