Soluzioni Tutorato 6 - MA/FM210 - 08/05/2018

<u>Esercizio 1.</u> Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1^2 + q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2)^3.$$

- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, e determinare l'energia (generalizzata) E, conservata dalle equazioni del moto.
- Sfruttando la simmetria della Lagrangiana, dimostrare che esiste un integrale primo distinto da E. Detto I tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli $I = c$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana ridotta.
- Si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale associato a tale Lagrangiana ridotta.

SOLUZIONE.

- Le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema sono:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = 2q_1 - 6q_1(q_1^2 + q_2^2)^2 \\ \ddot{q}_2 = 2q_2 - 6q_2(q_1^2 + q_2^2)^2 \end{cases}$$

  L'energia generalizzata E, costante lungo le soluzioni alle equazioni di Eulero-Lagrange, è

$$E = \dot{\mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (q_1^2 + q_2^2) + (q_1^2 + q_2^2)^3 \equiv \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 + U(\mathbf{q}),$$

  dove il potenziale U è

$$U(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}^2 + \mathbf{q}^6.$$

- La Lagrangiana è invariante per rotazioni, i.e., è invariate sotto trasformazioni delle coordinate $\mathbf{q} \to g_\alpha(\mathbf{q})$ della forma:

$$g_\alpha(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

  dove $\alpha \in \mathbb{R}$, e delle corrispondenti trasformazioni delle velocità

$$\dot{\mathbf{q}} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}.$$

  La corrispondente grandezza conservata è, per il teorema di Noether,

$$I = I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

  dove

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{dg_\alpha(\mathbf{q})}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix},$$

  e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}$, cosicché

$$I = q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1.$$

È conveniente passare a coordinate 'adattate alle simmetrie del sistema': visto che il potenziale $U(\mathbf{q})$ dipende solo dal modulo di $\mathbf{q}$, passo a coordinate polari:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

e noto che il potenziale, nelle nuove coordinate, dipende dalla sola coordinata r:

$$U(\mathbf{q}(r,\theta)) = -r^2 + r^6 \equiv V(r).$$

In altre parole, θ è una coordinata ciclica per la Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ ottenuta trasformando la Lagrangiana originale nelle nuove coordinate, che ha la forma:

$$\tilde{\mathcal{L}}(r,\dot{r},\dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + r^2 - r^6.$$

In tali coordinate, la conservazione di I prende la forma:

$$I = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} \equiv c.$$

Assumendo $c \neq 0$, posso invertire tale relazione nella forma $\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$. Usando il metodo di riduzione di Routh, ottengo la Lagrangiana ridotta le cui equazioni di Eulero-Lagrange descrivono il moto del sistema sulla superficie $I(r,\dot{\theta}) = c$:

$$\tilde{\mathcal{L}}_R(r,\dot{r}) = \tilde{\mathcal{L}}(r,\dot{r},\dot{\theta}) - \dot{\theta}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\theta}}\Big|_{\dot{\theta}=\frac{c}{r^2}} = \tilde{\mathcal{L}}(r,\dot{r},\frac{c}{r^2}) - \frac{c^2}{r^2} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{c^2}{2r^2} + r^2 - r^6.$$

- L'equazione del moto associata a $\tilde{\mathcal{L}}_R(r,\dot{r})$ è

$$\ddot{r} = \frac{c^2}{r^3} + 2r - 6r^5,$$

le cui soluzioni conservano l'energia

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{c^2}{2r^2} - r^2 + r^6 \equiv \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r).$$

Il grafico qualitativo di $V_{eff}(r) = \frac{c^2}{2r^2} - r^2 + r^6$ è mostrato in Fig.1.

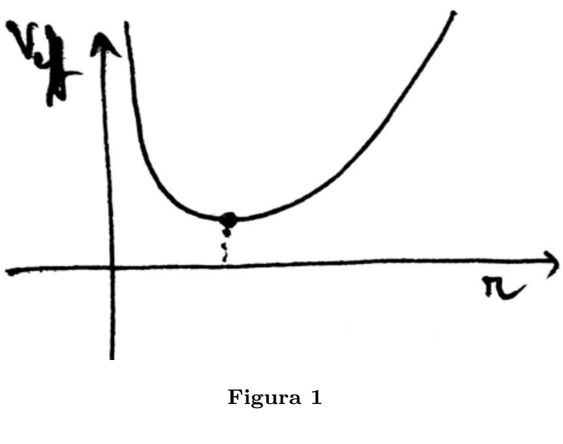


Figura 1

Le curve di livello corrispondenti, al variare dell'energia E, sono mostrate in Fig.2.

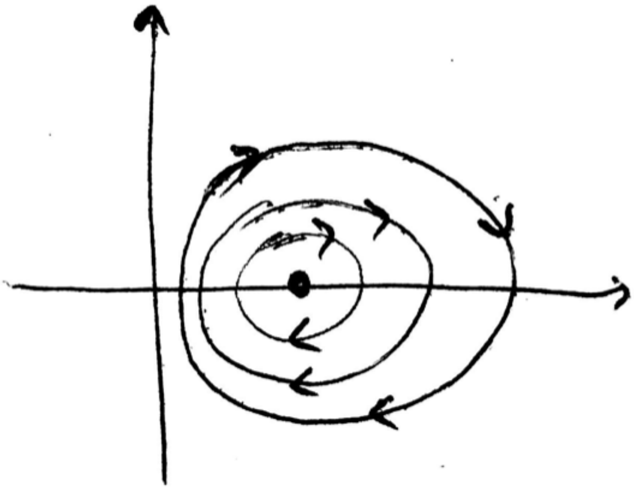


Figura 2

I moti corrispondenti a tali curve di livello sono tutti chiusi e periodici.

<u>Esercizio 2.</u> Si consideri un punto materiale di massa m in tre dimensioni, soggetto ad un campo di forze di energia potenziale $U(x, y, z)$ soddisfacente il seguente requisito: il potenziale è invariate rispetto al gruppo di trasformazioni g_α tale che:

$$g_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell\alpha \end{pmatrix},$$

dove $\ell > 0$ è una costante (con le dimensioni fisiche di lunghezza).

- Si trovi l'integrale primo corrispondente alla simmetria dell'energia potenziale e si determini un sistema di coordinate adattato (r, θ, z).
- Usando la simmetria del sistema si riduca di uno il numero di gradi di libertà, introducendo un'opportuna Lagrangiana ridotta. Determinare gli equilibri di tale Lagrangiana ridotta.
- Si studi la stabilità degli equilibri nel caso particolare:

$$V(r, \theta, z) = \frac{V_0}{r^2(\cos^2(\theta - z/\ell) - \sin^2(\theta - z/\ell))}.$$

SOLUZIONE.

- Innanzitutto si noti che la trasformazione sulle velovità indotta dalla trasformazione $\mathbf{x} \to g_\alpha(\mathbf{x})$ è

$$\dot{\mathbf{x}} \to \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}},$$

che lascia invariata l'energia cinetica $\frac{m}{2}\dot{x}^2$ del sistema. Quindi il gruppo di trasformazioni g_α lascia invariata la Lagrangiana meccanica $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(\mathbf{x})$ e, per il teorema di Noether, il sistema ammette la seguente grandezza conservata:

$$I = I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}},$$

dove

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{dg_\alpha(\mathbf{x})}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ \ell \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}}.$$

Di conseguenza:

$$I = I(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 + \ell\dot{x}_3).$$

Per effettuare il metodo di riduzione di Routh è conveniente passare (almeno temporaneamente) a coordinate cilindriche, in termini delle quali

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

e

$$\dot{x} = \dot{r}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{z}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cosicché

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2.$$

Quindi, la Lagrangiana del sistema in coordinate cilindriche è

$$\tilde{\mathcal{L}}(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r, \theta, z),$$

dove $V(r, \theta, z) \equiv U(\mathbf{x}(r, \theta, z))$ è invariante sotto la seguente trasformazione, che lascia invariata r: $\theta \to \theta + \alpha$, $z \to z + \ell\alpha$: tale è l'espressione della trasformazione $g_\alpha(\mathbf{x})$ riespressa in coordinate cilindriche. In altre parole:

$$V(r, \theta, z) = V(r, \theta + \alpha, z + \ell\alpha),$$

che vuol dire che V è una funzione di sole due variabili: di r e della combinazione $\theta - z/\ell$:

$$V(r, \theta, z) = v(r, \theta - z/\ell),$$

per un'opportuna funzione v. Chiamiamo allora ϕ la combinazione $\theta - z/\ell$, cosicché $\phi = \theta - z/\ell \Leftrightarrow z = \ell(\theta - \phi)$ e cambiamo coordinate, da (r, θ, z) a (r, θ, ϕ). Nelle nuove coordinate la Lagrangiana prende la forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) &= \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \ell^2(\dot{\theta} - \dot{\phi})^2\right] - v(r, \phi) \\ &= \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + (r^2 + \ell^2)\dot{\theta}^2 + \ell^2\dot{\phi}^2 - 2\ell^2\dot{\theta}\,\dot{\phi}\right] - v(r, \phi). \end{aligned}$$

In termini di queste variabili la variabile θ è ciclica, i.e., $\bar{\mathcal{L}}$ è indipendente dalla variabile θ (d'ora in poi scriveremo quindi $\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$). Quindi il momento coniugato

$$I = \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\theta}} = m(r^2 + \ell^2)\dot{\theta} - m\ell^2\dot{\phi}$$

è una grandezza conservata (che altro non è che la 'carica di Noether' I, già introdotta sopra, espressa nelle nuove variabili).

- La legge di conservazione per I può essere usata per eliminare $\dot\theta$ in funzione delle altre variabili:
$$\dot\theta = \frac{I + m\ell^2\dot\phi}{m(r^2+\ell^2)}.$$
A questo punto, sulla superficie a I costante, possiamo ridurre il sistema di un grado di libertà usando il metodo di Routh. La Lagrangiana ridotta (parametrizzata dal valore I della grandezza conservata) è:
$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{L}}_R(r,\phi,\dot r,\dot\phi) &= \bar{\mathcal{L}}(r,\phi,\dot r,\dot\theta,\dot\phi) - I\dot\theta\Big|_{\dot\theta=\frac{I+m\ell^2\dot\phi}{m(r^2+\ell^2)}} \\
&= \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{m(r^2+\ell^2)}{2}\frac{(I+m\ell^2\dot\phi)^2}{m^2(r^2+\ell^2)^2} + \frac{m}{2}\ell^2\dot\phi^2 - m\ell^2\dot\phi\frac{I+m\ell^2\dot\phi}{m(r^2+\ell^2)} - \frac{I(I+m\ell^2\dot\phi)}{m(r^2+\ell^2)} - v(r,\phi) \\
&= \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{m}{2}\ell^2\dot\phi^2 - \frac{(I+m\ell^2\dot\phi)^2}{2m(r^2+\ell^2)} - v(r,\phi) \\
&\equiv \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{a(r)}{2}\dot\phi^2 - b(r)\dot\phi - W(r,\phi), \qquad (1)
\end{aligned}$$
dove nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto il *potenziale efficace* $W(r,\phi)$:
$$W(r,\phi) = \frac{I^2}{2m(r^2+\ell^2)} + v(r,\phi)$$
e le funzioni
$$a(r) = \frac{m\ell^2 r^2}{r^2+\ell^2}, \qquad b(r) = \frac{I\ell^2}{r^2+\ell^2}$$
Le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti sono:
$$\begin{cases} m\ddot r = \frac{(I+m\ell^2\dot\phi)^2}{m(r^2+\ell^2)^2}r - \frac{\partial v(r,\phi)}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}\left[m\ell^2\dot\phi - \frac{\ell^2(I+m\ell^2\dot\phi)}{r^2+\ell^2}\right] = -\frac{\partial v(r,\phi)}{\partial\phi} \end{cases} \iff \begin{cases} m\ddot r = \frac{1}{2}a'(r)\dot\phi^2 - b'(r)\dot\phi - \frac{\partial W(r,\phi)}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}\left[a(r)\dot\phi - b(r)\right] = -\frac{\partial W(r,\phi)}{\partial\phi} \end{cases}$$
Si noti che le soluzioni alle equazioni di Eulero-Lagrange conservano la seguente energia generalizzata:
$$E = \dot r\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_R}{\partial\dot r} + \dot\phi\frac{\partial\bar{\mathcal{L}}_R}{\partial\dot\phi} - \bar{\mathcal{L}}_R = \frac{m}{2}\dot r^2 + \frac{a(r)}{2}\dot\phi^2 + W(r,\phi).$$
I punti di equilibrio sono le soluzioni di:
$$\begin{cases} \frac{\partial v(r,\phi)}{\partial r} = \frac{I^2}{m(r^2+\ell^2)^2}r \\ \frac{\partial v(r,\phi)}{\partial\phi} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial W(r,\phi)}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial W(r,\phi)}{\partial\phi} = 0 \end{cases}$$

- Nel caso particolare assegnato, il potenziale, espresso in funzione di r e ϕ, prende la forma:
$$v(r,\phi) = \frac{V_0}{r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi)} = \frac{V_0}{r^2\cos(2\phi)},$$
che è periodico di periodo π. Assumiamo, ad es., che $V_0 > 0$. Una discussione analoga alla seguente si può ripetere nel caso $V_0 < 0$.

Il potenziale efficace ha la forma:
$$W(r,\phi) = \frac{I^2}{2m(r^2+\ell^2)} + \frac{V_0}{r^2\cos(2\phi)}$$

e l'equazione per i punti di equilibrio è:

$$\begin{cases} -\frac{I^2 r}{m(r^2+\ell^2)^2} - \frac{2V_0}{r^3\cos(2\phi)} = 0 \\ \frac{2V_0\sin(2\phi)}{r^2\cos^2(2\phi)} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione vediamo che $\phi = 0$ o $\phi = \frac{\pi}{2}$ (modulo π). Sostituendo nella prima troviamo

$$\frac{I^2 r}{m(r^2+\ell^2)^2} = \pm\frac{2V_0}{r^3}$$

dove il segno $+$ corrisponde al caso $\phi = \pi/2$, mentre il segno $-$ corrisponde al caso $\phi = 0$. Nel caso che stiamo considerando, in cui $V_0 > 0$, tale ammette soluzione solo se il segno al membro di destra è $+$, ovvero $\phi = \pi/2 \equiv \phi_{eq}$. In tal caso, sull'equilibrio, r è una radice di

$$(\beta - 1)r^4 - 2\ell^2 r^2 - \ell^4 = 0, \quad \text{dove} \quad \beta = \frac{I^2}{2mV_0}.$$

Ora, se $\beta \leq 1$, tale equazione non ammette soluzioni fisicamente accettabili, mentre, se $\beta > 1$, ammette una soluzione fisicamente accettabile:

$$r = r_{eq} := \frac{\ell}{\sqrt{\beta - 1}}\sqrt{1+\sqrt{\beta}}. \tag{2}$$

In conclusione, il sistema ammette un punto di equilibrio se e solo se $\beta > 1$, nel qual caso il punto di equilibrio è

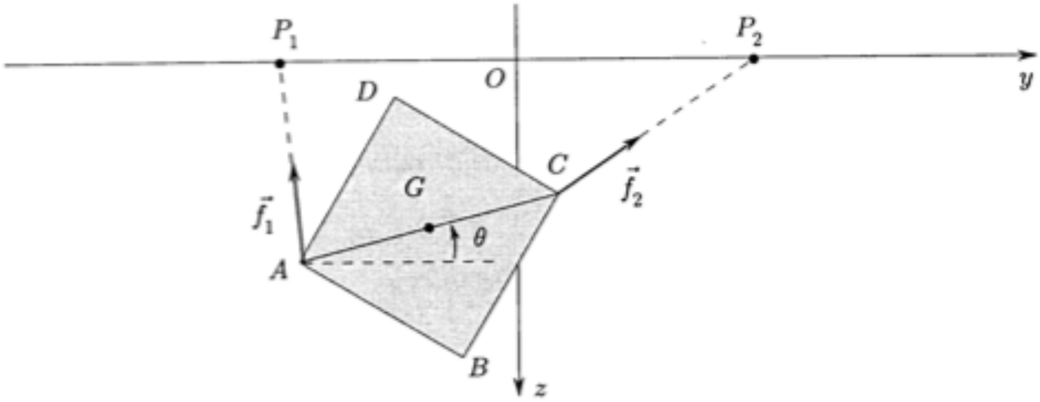
$$(r_{eq}, \phi_{eq}) = \Big(\ell\sqrt{\frac{1+\sqrt{\beta}}{\beta-1}}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Per studiare la stabilità degli equilibri, calcoliamo l'Hessiano sul punto di equilibrio. Si trova:

$$\mathcal{H}(r_{eq}, \phi_{eq}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W(r_{eq},\phi_{eq})}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 W(r_{eq},\phi_{eq})}{\partial r \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 W(r_{eq},\phi_{eq})}{\partial r \partial \phi} & \frac{\partial^2 W(r_{eq},\phi_{eq})}{\partial \phi^2} \end{pmatrix} = \frac{V_0}{r_{eq}^4}\begin{pmatrix} -8\frac{\sqrt{\beta}-1}{\sqrt{\beta}} & 0 \\ 0 & -4r_{eq}^2 \end{pmatrix}.$$

Visto che entrambi gli autovalori dell'Hessiano sul punto di equilibrio sono negativi, (r_{eq}, ϕ_{eq}) corrisponde a un massimo proprio non degenere del potenziale efficace, e quindi il punto di equilibrio è *instabile*.

Esercizio 4. Una lamina piana quadrata $ABCD$, omogenea, pesante, di massa M e lato ℓ, è vincolata (senza attrito) a muoversi su un piano verticale. Sui vertici A e C della lamina agiscono rispettivamente due forze elastiche di costante elastica k e centri $P_1 = (0, -d, 0)$ e $P_2 = (0, d, 0)$. Si assumano come coordinate lagrangiane le coordinate y e z del baricentro e e l'angolo θ che la diagonale AC forma con l'asse y, come in figura. Si scrivano la Lagrangiana del sistema, le equazioni di Eulero-Lagrange e le si risolvano.

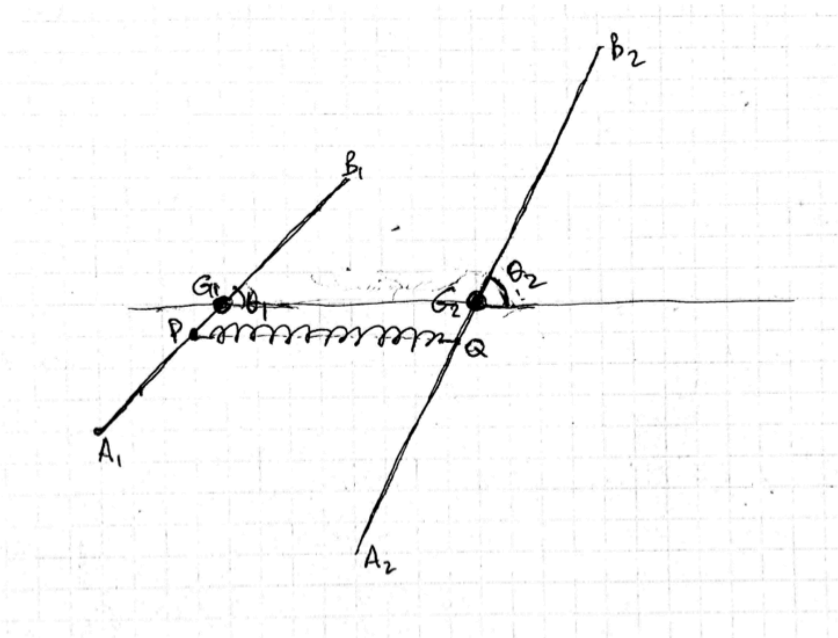


SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 5 del tutorato 11 del corso di FM210, A.A.2013/14, disponibile al link:

`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2013/tut11sol.pdf`

<u>Esercizio 5.</u> In un piano orizzontale sono poste due aste sottili A_1B_1 e A_2B_2 di rispettive masse M_1 e M_2 (distribuzione di massa omogenea) e lunghezze L_1 e L_2. Le aste sono libere di ruotare attorno ai rispettivi baricentri G_1 e G_2, fissi nel piano, con $|\overrightarrow{G_1G_2}| = \ell > 0$. Si supponga che $\ell < \min\{L_1, L_2\}$.

Sia P un punto appartenente all'asta A_1B_1, giacente tra G_1 e A_1, Q un punto appartenente all'asta A_2B_2, giacente tra G_2 e A_2, tali che $|\overrightarrow{G_1P}| = |\overrightarrow{G_2Q}| = r > 0$. Tra i punti P e Q agisce una molla ideale, di costante elastica k.



- Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 indicati in figura [Si ricordi che i momenti di inerzia non banali di un'asta sottile omogenea di massa M e lunghezza L attorno al baricentro sono uguali a $I = ML^2/12$.]

- Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange e si determini l'espressione dell'energia conservata.

- Determinare i punti di equilibrio del sistema
- Discutere la stabilità degli equilibri al variare del parametro $\beta = \ell/(2r)$, nei casi in cui $\beta \neq 1$.
- Si consideri il limite in cui $\ell \to 0$: si osservi che il corrispondente sistema Lagrangiano è invariate sotto il gruppo di trasformazioni $(\theta_1, \theta_2) \to (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si determini la carica di Noether corrispondente.
- Nel caso $\ell = 0$, si passi a coordinate 'adattate alla simmetria': $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\Theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Si scriva la Lagrangiana nelle nuove coordinate e si riconosca che Θ è una variabile ciclica. Con il metodo di riduzione di Routh, ci si riduca a un sistema Lagrangiano a un grado di libertà, e lo si risolva per quadrature.

SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 5 del tutorato 8 del corso di FM210, A.A.2016/17

`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2017/Soluzione_tut8_v3.pdf`