Tutorato 8 - MA/FM210 - 22/05/2018

<u>Esercizio 1.</u> Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2q^2} - \log q$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.
2. Determinare le equazioni di Hamilton.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di seconda specie $F(q, P) = P \log q$.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 0$.

SOLUZIONE.

1. Abbiamo $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^2}$ da cui otteniamo $\dot{q} = pq^2$ e quindi

$$H(p, q) = \frac{p^2 q^2}{2} + \log q \tag{1}$$

2. Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq^2 \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -p^2 q - \frac{1}{q} \end{cases}$$

3. La trasformazione canonica generata da F è data da

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{q} \\ Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \log q \end{cases}$$

da cui otteniamo la trasformazione

$$P(p, q) = pq \quad Q(p, q) = \log q \tag{2}$$

4. La nuova Hamiltoniana è data da $\tilde{H}(P, Q) = \frac{P^2}{2} + Q$ e le nuove equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -1 \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$P(t) = P(0) - t, \qquad Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{t^2}{2},$$

con dati iniziali $Q(0) = \log 1 = 0$, $P(0) = 0$ da cui otteniamo

$$q(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad p(t) = -te^{\frac{t^2}{2}} \tag{3}$$

ESERCIZIO 2. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} e^{-2q}$$

1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare la Lagrangiana associata.
3. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione generatrice di prima specie $F(q, Q) = Q^2 e^q$ e determinare la nuova Hamiltoniana.
4. Usare la trasformazione canonica trovata al punto precedente per risolvere le equazioni con dati iniziali $q(0) = 0$, $p(0) = 1$.

SOLUZIONE.

1. Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p e^{-2q} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = p^2 e^{-2q} \end{cases}$$

2. Dalla prima equazione di Hamilton, abbiamo che $p = \dot{q} e^{2q}$ La Lagrangiana associata all'Hamiltoniana assegnata è

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \max_p \{p\dot{q} - H(q, p)\} = \Big[p\dot{q} - H(q, p)\Big]\Big|_{p=\dot{q}e^{2q}} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 e^{2q}$$

3. La trasformazione canonica generata da F è

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} = Q^2 e^q \\ P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -2Q e^q \end{cases}$$

che si può invertire in

$$\begin{cases} Q = \sqrt{p}\, e^{-q/2} \\ P = -2\sqrt{p}\, e^{q/2} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} q = \log(-\frac{P}{2Q}) \\ p = -\frac{1}{2} Q P \end{cases} \tag{4}$$

Si noti che la trasformazione così determinata mappa in modo invertibile $(q, p) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ in $(Q, P) \in (0, +\infty) \times (-\infty, 0)$.

L'Hamiltoniana nelle nuove coordinate è

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{1}{2} Q^4$$

4. Le equazioni di Hamilton nelle nuove coordinate sono semplicemente

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = 0 \\ \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = -2Q^3 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$Q(t) = Q(0), \qquad P(t) = P(0) - 2\big[Q(0)\big]^3 t.$$

I dati iniziali $q(0) = 0$, $p(0) = 1$ corrispondono, nelle nuove variabili, a $Q(0) = 1$, $P(0) = -2$, come si vede usando la prima delle (4). La soluzione desiderata nelle nuove variabili è, quindi,

$$Q(t) = 1, \qquad P(t) = -2(t + 1).$$

Usando la seconda delle (4) otteniamo la soluzione desiderata nelle coordinate originali:

$$q(t) = \log(t + 1), \qquad p(t) = t + 1,$$

che è definita per $t > -1$.

Esercizio 3. Si consideri la Lagrangiana $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = q\dot{q}^2$

1. Per quali valori di q la Lagrangiana $\mathcal{L}$ è regolare?

2. Determinare l'Hamiltoniana associata e le corrispondenti equazioni di Hamilton.

3. Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \frac{p^2}{4q} \\ P = -\frac{4q^2}{3p} \end{cases}$$

è canonica, mostrando che è la trasformazione associata alla funzione generatrice di seconda specie $F(q,P) = -\frac{4}{9}\frac{q^3}{P}$. Su quale dominio è definita la trasformazione?. Determinare l'Hamiltoniana nelle nuove coordinate.

4. Usare la trasformazione canonica del punto precedente per risolvere le equazioni del moto con dato iniziale $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 2/3$.

SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 3 del tutorato 11 del corso di Meccanica Analitica, A.A.2014/15, disponibile al link:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2015/soluzioni_11.pdf`

Esercizio 4.

1. Data l'Hamiltoniana

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{q})$$

con $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^6$, si verifichi che, se $U(\mathbf{q})$ è invariante rispetto a rotazioni attorno all'asse $\hat{e}_3$ (i.e., $U(\mathbf{q}) = V(\sqrt{q_1^2+q_2^2}, q_3)$, per un'opportuna funzione V), allora la parentesi di Poisson di H con la terza componente del momento angolare $l_3 = (\mathbf{q}\wedge\mathbf{p})_3 = q_1p_2 - q_2p_1$ è uguale a zero.

2. Si verifichi che $\{l_1,l_2\} = l_3$, $\{l_2,l_3\} = l_1$, $\{l_3,l_1\} = l_2$. Si dimostri quindi che se il potenziale U dell'Hamiltoniana al punto precedente è invariate per rotazioni sia attorno all'asse $\hat{e}_3$, che attorno all'asse $\hat{e}_1$, allora tutte e tre le componenti di $\mathbf{l} = \mathbf{q}\wedge\mathbf{p}$ sono integrali primi del moto.

SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 4 del tutorato 11 del corso di Meccanica Analitica, A.A.2014/15, disponibile al link:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2015/soluzioni_11.pdf`

Esercizio 5. Per $q > 0$ si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2q^2}\Big[1 + \Big(\frac{\dot{q}}{q^2}\Big)^2\Big]$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.

2. Determinare le equazioni di Hamilton.

3. Si determini la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $S(q,P) = \frac{P}{2q^2}$ e si calcoli l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (Q,P), nonchè le nuove equazioni di Hamilton.

4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.

5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 1 del tutorato 12 del corso di Meccanica Analitica, A.A.2014/15, disponibile al link:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2015/soluzioni_12.pdf`

<u>Esercizio 6.</u> Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3}$$

1. Determinare l'Hamiltoniana.

2. Determinare le equazioni di Hamilton.

3. Si determini la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $S(q, P) = \frac{Pq^3}{3}$ e si calcoli l'Hamiltoniana nelle nuove variabili (Q, P), nonchè le nuove equazioni di Hamilton.

4. Si usino le nuove variabili per risolvere il moto corrispondente ai dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$.

5. Si verifichi esplicitamente che tale soluzione risolve le equazioni di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana originale.

SOLUZIONE. Si veda la soluzione all'esercizio 2 del tutorato 12 del corso di Meccanica Analitica, A.A.2014/15, disponibile al link:
`http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/MA_2015/soluzioni_12.pdf`