3^o tutorato - FM210/MA - 26/3/2018

Esercizio 1 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} = -4x(x^2 + \tfrac{1}{2}x - 1)$$

1. Si determini l'espressione dell'energia del sistema e se ne verifichi la conservazione;
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità;
3. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi;
4. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici e a moti chiusi aperiodici;
5. Si scriva il periodo dei moti periodici in forma di un integrale definito.

Esercizio 2 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} = x + 2\sin x$$

1. Si determini l'espressione dell'energia del sistema e se ne verifichi la conservazione;
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determino i punti di equilibrio e la loro stabilità;
3. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare dell'energia.

Esercizio 3 Si consideri il sistema meccanico costituito da due particelle di massa m nello spazio tri-dimensionale descritto dalle seguenti equazioni del moto ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$):

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = -2\alpha\big(1 - 3|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4\big)\big(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\big), \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = -2\alpha\big(1 - 3|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4\big)\big(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\big), \end{cases}$$

con $m, \alpha > 0$.

1. Si riconosca che le forze sono centrali, e quindi in particolare conservative. Si calcoli il potenziale $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x_2})$ corrispondente.

2. Passando alle coordinate del centro di massa e della posizione relativa $\mathbf{r}$ di una particella rispetto all'altra, si mostri che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. Si scriva inoltre l'equazione del moto per la posizione relativa $\mathbf{r}$.

3. Si identifichino tutti gli integrali primi del moto relativo e se ne verifichi esplicitamente la conservazione;

4. Si disegni il grafico del potenziale efficace al variare del momento angolare, si disegnino le orbite nel piano delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$ e si discutano le proprietà qualitative risultanti del moto radiale e del moto complessivo. In particolare:

   (a) Per $0 \leq L^2 < \frac{1}{12} m\alpha$ si trovino le condizioni sotto cui il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico;

   (b) Per $L^2 = \frac{1}{12} m\alpha$ si trovi un moto complessivo periodico nella coordinata relativa;

   (c) Per $L^2 > \frac{1}{12} m\alpha$ si dimostri che tutte le orbite sono aperte.

Esercizio 4 Si consideri il moto di una particella di massa m nello spazio tri-dimensionale soggetta a una forza centrale di potenziale

$$U(\mathbf{x}) = V(|\mathbf{x}|) \ , \qquad V(\rho) = \alpha \frac{\log^2(\rho/r_0)}{\rho^2},$$

e $m, \alpha, r_0 > 0$.

1. Si scriva l'equazione del moto. Si identifichino tutti gli integrali primi del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.

2. Si studi qualitativamente il moto, al variare del momento angolare $\mathbf{L}$. Piú in dettaglio:

   (a) Si disegni il grafico del potenziale V e di quello efficace V_{eff} al variare di L.

(b) Si studi qualitativamente il moto distinguendo diversi casi. Nel caso $L < \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:

- Si dimostri che esistono un punto di equilibrio stabile e uno instabile del moto radiale;
- Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$;
- Si dica per quali valori dell'energia il moto radiale è periodico;
- Per tali valori si calcolino i periodi del moto radiale e del moto angolare come integrali definiti;
- Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico.

(c) Nel caso $L = \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:

- Si trovi un punto di equilibrio del moto radiale e se ne discuta la stabilità;
- Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$;
- Si dimostri che l'unica orbita periodica del moto radiale è quella banale (ρ costantemente uguale alla posizione di equilibrio); si calcoli il periodo del moto complessivo corrispondente.

(d) Nel caso $L > \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:

- Si dimostri che non esistono punti di equilibrio del moto radiale;
- Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$.
- Si dimostri che non esistono orbite periodiche del moto radiale e si discutano qualitativamente le proprietà del moto sia radiale che complessivo.

Esercizio 5 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad un potenziale centrale

$$V(|\mathbf{r}|) = V_0 \left(\frac{1}{10} \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{10} - \frac{1}{6} \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{6} \right) \tag{1}$$

dove $V_0, r_0 > 0$.

- Scrivere l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare.
- Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo L del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:

  1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L, si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
  2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.

3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.

Esercizio 6 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad un potenziale centrale

$$V(|\mathbf{r}|) = V_0 \left(-\frac{1}{4}\left(\frac{|\mathbf{r}|}{r_0}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{|\mathbf{r}|}{r_0}\right)^2 \right) \tag{2}$$

con $V_0, r_0 > 0$.

- Scrivere l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare.
- Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo L del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:

  1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L, si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
  2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.
  3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.
  4. per i moti aperti, si discuta se la soluzione è globale o no.