

3° tutorato - FM210/MA - 26/3/2018

Esercizio 1 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} = -4x(x^2 + \frac{1}{2}x - 1)$$

1. Si determini l'espressione dell'energia del sistema e se ne verifichi la conservazione;
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determinino i punti di equilibrio e la loro stabilità;
3. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi;
4. Si identifichino i dati iniziali corrispondenti a moti periodici e a moti chiusi aperiodici;
5. Si scriva il periodo dei moti periodici in forma di un integrale definito.

Soluzione Si veda la soluzione dell'esercizio 1 del Tutorato 3 del corso di FM210, A.A. 2013/14, disponibile su

http://www.mat.uniroma3.it/users/betta/FM210/tutorato3-1dsystems_sol-2.pdf

Esercizio 2 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} = x + 2 \sin x$$

1. Si determini l'espressione dell'energia del sistema e se ne verifichi la conservazione;
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale e si determinino i punti di equilibrio e la loro stabilità;
3. Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare dell'energia.

Soluzione Il sistema assegnato è conservativo, con energia potenziale $U(x)$ tale che $U'(x) = -x - 2 \sin x$. Una possibile scelta di U è

$$U(x) = -\frac{x^2}{2} + 2(\cos x - 1).$$

Come sempre, l'energia meccanica $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x)$ si conserva, come si vede derivando E rispetto al tempo: $\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}U'(x) = 0$, poichè $\ddot{x} = -U'(x)$.

Il potenziale ha le seguenti proprietà: è pari; è ≤ 0 , e $= 0$ solo in $x = 0$; ha un unico punto critico in $x = 0$ (infatti, studiando graficamente l'equazione per i punti critici,

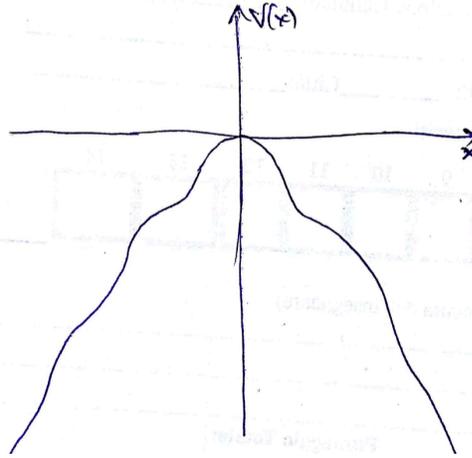


Figure 1: Grafico qualitativo di U

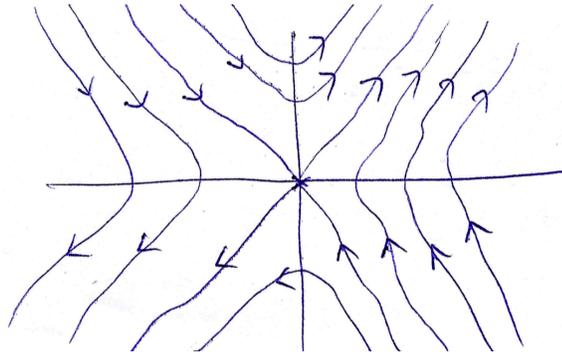


Figure 2: Grafico delle curve di livello associate al potenziale $U(x)$, al variare dell'energia E .

$-x - 2 \sin x = 0$, si vede facilmente che tale equazione ha un'unica radice in $x = 0$, i dettagli sono lasciati al lettore). Il grafico qualitativo di U è mostrato in figura 1. In particolare, il sistema ammette un unico punto di equilibrio, $x = 0$, che è instabile, in quanto corrisponde al massimo del potenziale.

Il grafico qualitativo delle curve di livello del sistema, al variare dell'energia E , sono mostrate in figura 2.

Oltre al moto banale, $x(t) \equiv 0$, il sistema ammette solo moti aperti che, a seconda dei valori di energia, tendono a $\pm\infty$ o nel futuro o nel passato. Più specificatamente:

- se $E < 0$ e $x(0) < 0$, il moto tende a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro
- se $E < 0$ e $x(0) > 0$, il moto tende a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro
- se $E = 0$ e $x(0) < 0$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a $x = 0$ nel futuro, o viceversa

- se $E = 0$ e $x(0) > 0$, il moto tende a $+\infty$ nel passato e a $x = 0$ nel futuro, o viceversa
- se $E > 0$, il moto tende a $-\infty$ nel passato e a $+\infty$ nel futuro, o viceversa.

Si noti che il sistema non ammette moti periodici. Si noti anche che tutti i moti del sistema sono globali nel tempo, poichè il tempo di fuga all'infinito è infinito (per x grandi: $V(x) \sim -x^2/2$, e quindi $\frac{1}{\sqrt{2(E-U(x))}} \sim |x|^{-1}$, che NON è integrabile all'infinito).

NOTA: il problema è simile, ma non identico, all'esercizio 5 del Tutorato 3 del corso di FM210, A.A. 2013/14, disponibile, con soluzione, su

http://www.mat.uniroma3.it/users/betta/FM210/tutorato3-1dsystems_sol-2.pdf

In tale esercizio il punto materiale di massa m si muove sotto l'effetto dell'energia potenziale $U(x) = x + 2 \sin x$, piuttosto che secondo l'equazione del moto $\ddot{x} = x + 2 \sin x$.

Esercizio 3 Si consideri il sistema meccanico costituito da due particelle di massa m nello spazio tri-dimensionale descritto dalle seguenti equazioni del moto ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$):

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}}_1 = -2\alpha(1 - 3|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 = -2\alpha(1 - 3|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^4)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \end{cases}$$

con $m, \alpha > 0$.

1. Si riconosca che le forze sono centrali, e quindi in particolare conservative. Si calcoli il potenziale $U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ corrispondente.
2. Passando alle coordinate del centro di massa e della posizione relativa \mathbf{r} di una particella rispetto all'altra, si mostri che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. Si scriva inoltre l'equazione del moto per la posizione relativa \mathbf{r} .
3. Si identifichino tutti gli integrali primi del moto relativo e se ne verifichi esplicitamente la conservazione;
4. Si disegni il grafico del potenziale efficace al variare del momento angolare, si disegnino le orbite nel piano delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$ e si discutano le proprietà qualitative risultanti del moto radiale e del moto complessivo. In particolare:
 - (a) Per $0 \leq L^2 < \frac{1}{12}m\alpha$ si trovino le condizioni sotto cui il moto complessivo nella coordinata relativa è periodico;
 - (b) Per $L^2 = \frac{1}{12}m\alpha$ si trovi un moto complessivo periodico nella coordinata relativa;
 - (c) Per $L^2 > \frac{1}{12}m\alpha$ si dimostri che tutte le orbite sono aperte.

Soluzione Si veda la soluzione dell'esercizio 2 del Tutorato VII del corso di FM210, A.A. 2012/13, disponibile su

http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210_2012/sol7.pdf

Esercizio 4 Si consideri il moto di una particella di massa m nello spazio tri-dimensionale soggetta a una forza centrale di potenziale

$$U(\mathbf{x}) = V(|\mathbf{x}|), \quad V(\rho) = \alpha \frac{\log^2(\rho/r_0)}{\rho^2},$$

e $m, \alpha, r_0 > 0$.

1. Si scriva l'equazione del moto. Si identifichino tutti gli integrali primi del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
2. Si studi qualitativamente il moto, al variare del momento angolare \mathbf{L} . Più in dettaglio:
 - (a) Si disegni il grafico del potenziale V e di quello efficace V_{eff} al variare di L .

- (b) Si studi qualitativamente il moto distinguendo diversi casi. Nel caso $L < \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:
- Si dimostri che esistono un punto di equilibrio stabile e uno instabile del moto radiale;
 - Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$;
 - Si dica per quali valori dell'energia il moto radiale è periodico;
 - Per tali valori si calcolino i periodi del moto radiale e del moto angolare come integrali definiti;
 - Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico.
- (c) Nel caso $L = \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:
- Si trovi un punto di equilibrio del moto radiale e se ne discuta la stabilità;
 - Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$;
 - Si dimostri che l'unica orbita periodica del moto radiale è quella banale (ρ costantemente uguale alla posizione di equilibrio); si calcoli il periodo del moto complessivo corrispondente.
- (d) Nel caso $L > \sqrt{\frac{m\alpha}{2}}$:
- Si dimostri che non esistono punti di equilibrio del moto radiale;
 - Si disegnino le orbite del moto radiale nello spazio delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$.
 - Si dimostri che non esistono orbite periodiche del moto radiale e si discutano qualitativamente le proprietà del moto sia radiale che complessivo.

Soluzione

Si veda la soluzione dell'esercizio 1 del secondo esonero del corso di FM210, A.A. 2011/12, disponibile su

http://www.mat.uniroma3.it/users/giuliani/public_html/didattica/FM210/sec-esonero-sol.pdf

Esercizio 5 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad un potenziale centrale

$$V(|\mathbf{r}|) = V_0 \left(\frac{1}{10} \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{10} - \frac{1}{6} \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^6 \right) \quad (1)$$

dove $V_0, r_0 > 0$.

- Scrivere l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare.
- Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo L del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:

1. si studi il moto radiale: si disegnino i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L , si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.
2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.
3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.

SOLUZIONI

- L'equazione del moto è

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{V_0}{r_0} \left(\left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{11} - \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^7 \right) \hat{\mathbf{r}}.$$

per verificare la conservazione dell'energia meccanica, derivo rispetto al tempo $E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(|\mathbf{r}|)$ e trovo

$$\dot{E} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \left[m\ddot{\mathbf{r}} - \frac{V_0}{r_0} \left(\left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^{11} - \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r}|} \right)^7 \right) \hat{\mathbf{r}} \right] = 0.$$

Per verificare la conservazione del momento angolare, derivo rispetto al tempo $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ e trovo:

$$\dot{\mathbf{L}} = m\dot{\mathbf{r}} \wedge \dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r} \wedge \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ è parallela a \mathbf{r} stesso.

- 1. Il potenziale efficace è

$$V_{eff}(\rho) = V_0 \left(\frac{1}{10} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{10} - \frac{1}{6} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^6 \right) + \frac{L^2}{2m\rho^2} = V_0 \left[\frac{1}{10} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^{10} - \frac{1}{6} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^6 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{r_0}{\rho} \right)^2 \right], \quad (2)$$

dove $\alpha = L^2/(mV_0r_0^2)$ è un parametro a-dimensionale positivo.

I valori del potenziale efficace ai bordi del dominio di definizione sono

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff}(\rho) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} V_{eff}(\rho) = 0 \quad (3)$$

L'equazione del moto radiale è

$$m\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho) \quad (4)$$

e corrispondentemente l'energia meccanica totale si può riscrivere nella forma:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho). \quad (5)$$

Per trovare i valori critici dobbiamo studiare

$$V'_{eff}(\rho) = -\frac{V_0}{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{\rho}\right)^{11} - \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^7 + \alpha \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^3 \right] = -\frac{V_0}{r_0} \frac{\alpha t^2 - t + 1}{t^{11/4}}, \quad (6)$$

dove $t := (\rho/r_0)^4$. Le radici di $V'_{eff}(\rho)$ sono quindi:

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha}}{2\alpha}. \quad (7)$$

Quindi al variare dei parametri, V_{eff} può avere 0, 1 o 2 punti critici. Più precisamente

- CASO $L^2 < \frac{mV_0r_0^2}{4}$: la derivata ha due zeri in $t = t_{1,2}$; quindi, ricordando che l'interpretazione fisica della variabile ρ richiede $\rho > 0$, i valori di $\rho > 0$ per cui V_{eff} si annulla sono due:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= r_0 \sqrt[4]{\frac{mV_0r_0^2 + \sqrt{mV_0r_0^2(mV_0r_0^2 - 4L^2)}}{2L^2}}, \\ \rho_2 &= r_0 \sqrt[4]{\frac{mV_0r_0^2 - \sqrt{mV_0r_0^2(mV_0r_0^2 - 4L^2)}}{2L^2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

ed è facile verificare che ρ_1 è massimo locale, mentre ρ_2 è minimo locale.

- CASO $L^2 = \frac{mV_0r_0^2}{4}$ esiste un solo punto critico, $t_0 = \frac{mV_0r_0^6}{2L^2}$, quindi $\rho_0 = r_0 \sqrt[4]{\frac{mV_0r_0^2}{2L^2}}$ (le radici negative o complesse vengono di nuovo scartate, come al punto precedente, poiché $\rho > 0$), che è un punto di flesso;
- CASO $L^2 > \frac{mV_0r_0^2}{4}$ non ci sono punti critici (ovvero il potenziale è monotono decrescente).

Il grafico delle curve di livello è mostrato in figura solo per il primo caso. La soluzione per quadrature sul semipiano superiore dello spazio delle fasi ridotto radiale ($\dot{\rho} \geq 0$) con dato iniziale $\rho(0)$ a $t = 0$ è

$$\int_{\rho(0)}^{\rho(t)} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = t$$

e un'espressione analoga è valida come al solito per le porzioni di traiettoria nel semipiano inferiore dello spazio delle fasi ridotto.

L'unico caso in cui sono presenti moti periodici radiali non banali è $L^2 < \frac{mV_0r_0^2}{4}$. In questo caso, se E è maggiore del minimo, l'equazione $E = V_{eff}(\rho)$ ammette due soluzioni positive, chiamiamole ρ_i e ρ_f (con $\rho_i < \rho_f$). Allora, il periodo del moto radiale è

$$T_0 = 2 \int_{\rho_i}^{\rho_f} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} \quad (9)$$

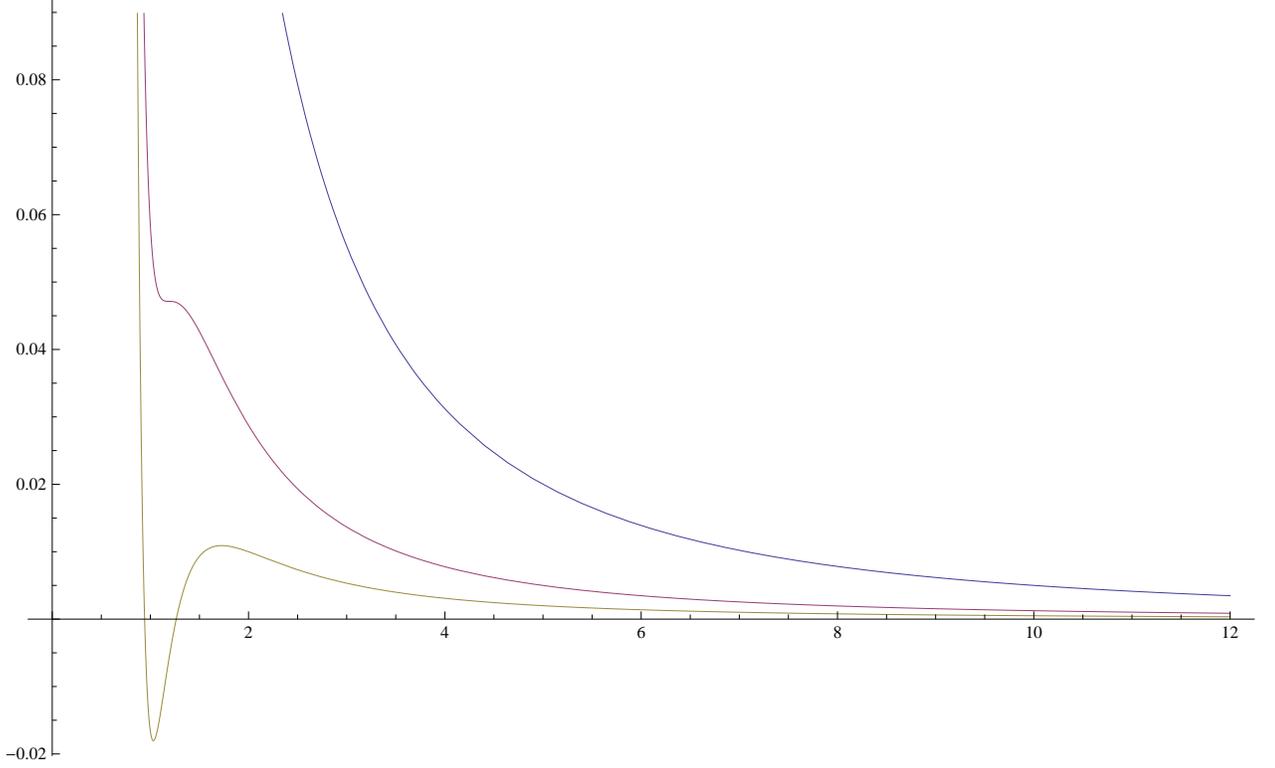


Figure 3: Grafico di V_{eff} , con valori dei parametri scelti nei tre diversi casi qualitativi descritti.

2. Dalla conservazione del momento angolare sappiamo che

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m\rho^2} \quad (10)$$

da cui otteniamo la soluzione

$$\theta(t) - \theta_0 = \int_0^t ds \frac{L}{m\rho(s)^2} \quad (11)$$

dove $\rho(t)$ è la soluzione per quadrature del moto radiale ottenuta sopra.

Nei casi, discussi sopra, in cui il moto radiale è periodico e non banale, la legge oraria di θ si può scrivere come sovrapposizione di due moti periodici di periodi $T_1 = 2\pi/\omega_1$ e $T_0 = 2\pi/\omega_0$:

$$\theta(t) = f(\omega_1 t) + g(\omega_0 t), \quad \text{dove} \quad f(\omega_1 t) = \theta_0 + \omega_1 t, \quad g(\omega_0 t) = \int_0^t ds \frac{L}{m\rho(s)^2} - \omega_1 t,$$

con

$$\omega_1 = \frac{2}{T_0} \int_{\rho_i}^{\rho_f} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}}. \quad (12)$$

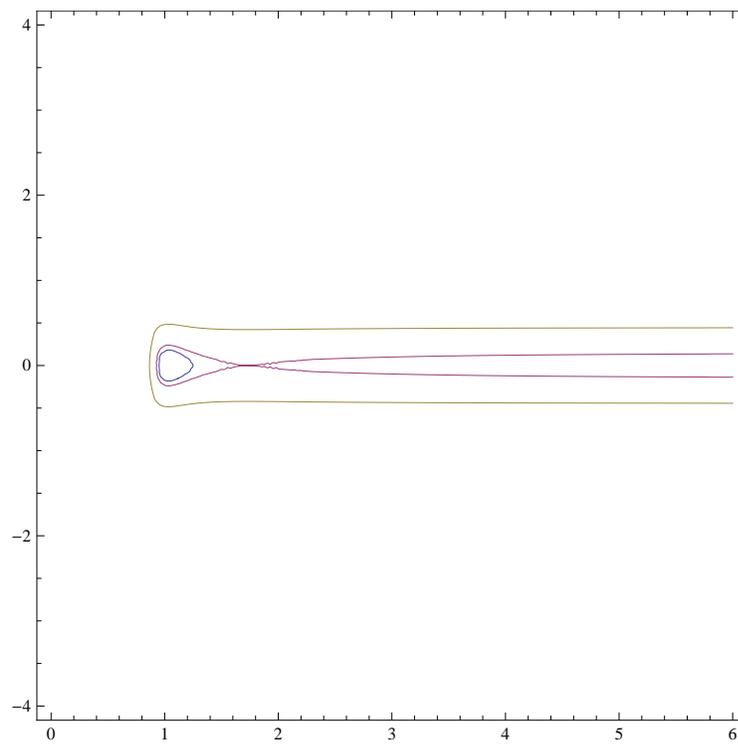


Figure 4: Esercizio 1 Grafico delle curve di livello nel caso di esistenza di moti periodici.

3. Un caso in cui il moto complessivo è sicuramente periodico è quello in cui la variabile radiale si muove di moto banale, i.e., $\rho(t) \equiv (\text{cost.})$, che è un caso che si verifica per $L^2 \leq \frac{1}{4}mV_0r_0^2$ e dato iniziale corrispondente a un punto di equilibrio di V_{eff} . In questi casi, $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$ (dove ρ_{eq} può essere ρ_1 o ρ_2 nel caso $L^2 < \frac{1}{4}mV_0r_0^2$, oppure ρ_0 nel caso $L^2 = \frac{1}{4}mV_0r_0^2$), mentre θ si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{L}{m\rho_{eq}^2}t \quad (13)$$

che corrisponde a un moto complessivo circolare uniforme di periodo

$$T = 2\pi \frac{m\rho_{eq}^2}{L} \quad (14)$$

Se invece il moto radiale è periodico non banale di periodo T_0 , la condizione necessaria affinché il moto complessivo sia periodico è che l'incremento della variabile angolare in un periodo T_0 , $\Delta\theta = \omega_1 T_0$, con ω_1 definito in (12), sia multiplo razionale di 2π , i.e.,

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_i}^{\rho_f} d\rho \frac{L}{m\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = 2\pi \frac{k}{n}, \quad (15)$$

per qualche $k, n \in \mathbb{Z}$, nel qual caso il moto complessivo è periodico di periodo $nT_0 = kT_1$. In caso contrario il moto complessivo è quasi-periodico e riempie densamente una regione bidimensionale dello spazio (sia dello spazio fisico che dello spazio delle fasi).

Esercizio 6 Si consideri il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad un potenziale centrale

$$V(|\mathbf{r}|) = V_0 \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{|\mathbf{r}|}{r_0} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{|\mathbf{r}|}{r_0} \right)^2 \right) \quad (16)$$

con $V_0, r_0 > 0$.

- Scrivere l'equazione del moto e verificare esplicitamente la conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare.
- Si studi qualitativamente il moto e lo si risolva per quadrature, supponendo che il modulo L del momento angolare sia non nullo. Più precisamente:
 1. si studi il moto radiale: si disegnano i grafici del potenziale efficace e delle curve di livello corrispondenti, si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare di E e di L , si esibisca la soluzione per quadrature, e si calcoli il periodo dei moti limitati non critici in termini di un integrale definito.

2. si studi il moto angolare: in particolare, nei casi in cui il moto radiale è periodico, si calcoli il secondo periodo del moto angolare in termini di un integrale definito.
3. si discuta in quali casi il moto complessivo è periodico, e in quali casi è quasi-periodico.
4. per i moti aperti, si discuta se la soluzione è globale o no.

SOLUZIONE

- Per il primo punto si procede come negli esercizi precedenti.

1. $V_{eff}(\rho) = V_0 \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^2 \right) + \frac{L^2}{2m\rho^2}$ e consideriamo solo il caso $L \neq 0$. Si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V_{eff} = \infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} V_{eff} = -\infty \quad (17)$$

e

$$V'_{eff}(\rho) = V_0 \left(-\frac{\rho^3}{r_0^4} + \frac{\rho}{r_0^2} \right) - \frac{L^2/m}{\rho^3} = \frac{V_0 \left(-\frac{\rho^6}{r_0^4} + \frac{\rho^4}{r_0^2} \right) - L^2/m}{\rho^3} \quad (18)$$

Con la sostituzione $\rho^2 = t$, osserviamo che l'equazione $V'_{eff}(\rho) = 0$ ha soluzione (nelle variabili t) nei punti in cui la funzione $V_0 \left(-\frac{t^3}{r_0^4} + \frac{t^2}{r_0^2} \right)$ interseca la retta orizzontale L^2/m : quindi se L è più piccolo del massimo di $V_0 \left(-\frac{t^3}{r_0^4} + \frac{t^2}{r_0^2} \right)$ (che è uguale a $\frac{4}{27}V_0r_0^2$, come è facile verificare), allora ci sono due punti in cui $V'_{eff}(\rho) = 0$, mentre se $L > \frac{4}{27}V_0r_0^2$ l'equazione $V'_{eff}(\rho) = 0$ non ha soluzioni (e quindi $V_{eff}(\rho)$ è sempre decrescente). I diversi comportamenti qualitativi di V_{eff} sono mostrati in Fig.5 e Fig.6. Le curve di livello per il primo caso sono mostrate in Fig.7.

Il sistema ammette moti periodici del moto radiale nel caso in cui $0 < L < \frac{4}{27}V_0r_0^2$, l'energia è minore di quella del punto di equilibrio instabile ρ_{inst} e $\rho(0) < \rho_{inst}$. In tal caso il periodo del moto radiale è

$$T_0 = \sqrt{\frac{2}{m}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_{eff}(\rho)}} \quad (19)$$

dove $\rho_{1,2}$ sono i punti di inversione.

2. La discussione è analoga a quella degli esercizi precedenti.
3. La discussione è analoga a quella degli esercizi precedenti.

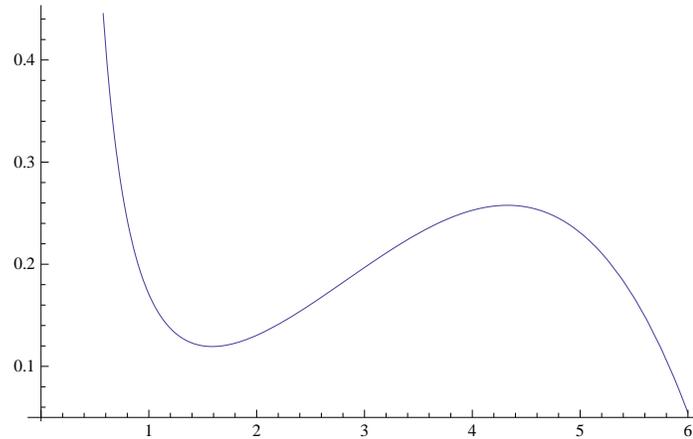


Figure 5: Esercizio 4. Grafico di V_{eff} , con L abbastanza piccolo da conservare il punto di equilibrio stabile.

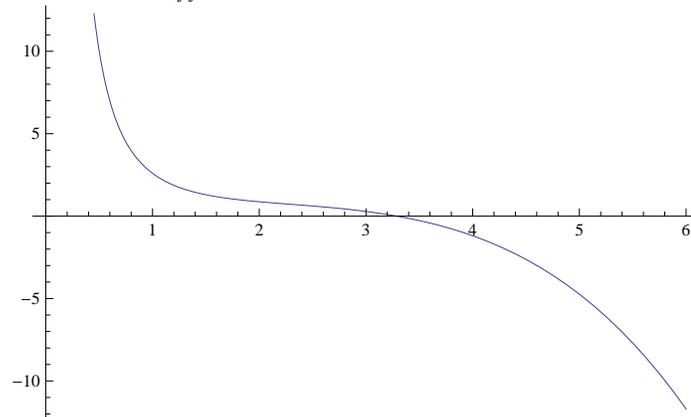


Figure 6: Esercizio 4. Grafico di V_{eff} , con L abbastanza grande da rendere il potenziale monotono decrescente.

4. Consideriamo ora dati iniziali corrispondenti ad un moto aperto con $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = +\infty$. Il tempo per raggiungere l'infinito è

$$T_{\infty} = \int_{\rho(0)}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{2 \left(E + V_0 \left(+\frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^2 \right) - \frac{L^2}{2m\rho^2} \right)}} \quad (20)$$

Per ρ grandi la funzione integranda si comporta come $\sqrt{2}(r_0^2/\rho^2)$, che è integrabile all'infinito, quindi $T_{\infty} < 0$ e il moto *non* esiste globalmente.

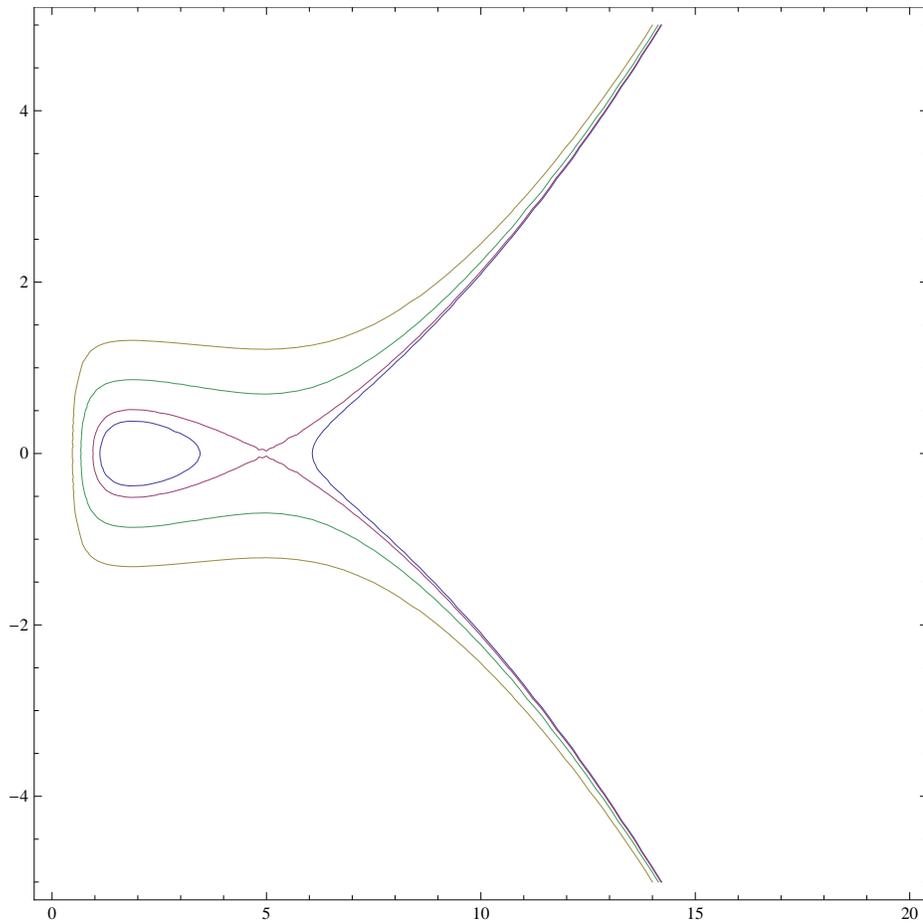


Figure 7: Esercizio 4. Curve di livello nel caso L "piccolo".