Tutorato 6 - MA/FM210 - 08/05/2018

<u>ESERCIZIO 1.</u> Si consideri la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1^2 + q_2^2 - (q_1^2 + q_2^2)^3.$$

- Scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange, e determinare l'energia (generalizzata) E, conservata dalle equazioni del moto.
- Sfruttando la simmetria della Lagrangiana, dimostrare che esiste un integrale primo distinto da E. Detto I tale integrale primo, si consideri il sistema di Lagrange ristretto sui livelli $I = c$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si dimostri che tale restrizione è ancora un sistema Lagrangiano, ad un grado di libertà, e si scriva la corrispondente Lagrangiana ridotta.
- Si studi qualitativamente il moto del sistema unidimensionale associato a tale Lagrangiana ridotta.

<u>ESERCIZIO 2.</u> Si consideri un punto materiale di massa m in tre dimensioni, soggetto ad un campo di forze di energia potenziale $U(x, y, z)$ soddisfacente il seguente requisito: il potenziale è invariate rispetto al gruppo di trasformazioni g_α tale che:

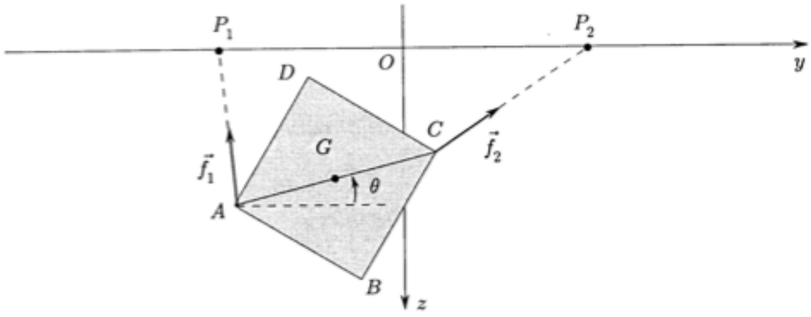
$$g_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell\alpha \end{pmatrix},$$

dove $\ell > 0$ è una costante (con le dimensioni fisiche di lunghezza).

- Si trovi l'integrale primo corrispondente alla simmetria dell'energia potenziale e si determini un sistema di coordinate adattato (r, θ, z).
- Usando la simmetria del sistema si riduca di uno il numero di gradi di libertà, introducendo un'opportuna Lagrangiana ridotta. Determinare gli equilibri di tale Lagrangiana ridotta.
- Si studi la stabilità degli equilibri nel caso particolare:

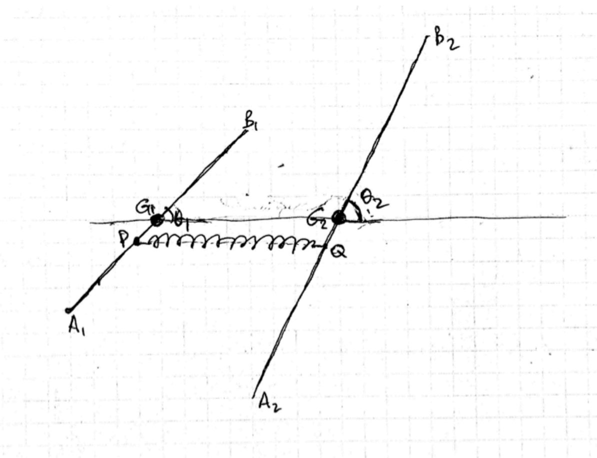
$$V(r, \theta, z) = \frac{V_0}{r^2(\cos^2(\theta - z/\ell) - \sin^2(\theta - z/\ell))}.$$

<u>ESERCIZIO 3.</u> Una lamina piana quadrata $ABCD$, omogenea, pesante, di massa M e lato ℓ, è vincolata (senza attrito) a muoversi su un piano verticale. Sui vertici A e C della lamina agiscono rispettivamente due forze elastiche di costante elastica k e centri $P_1 = (0, -d, 0)$ e $P_2 = (0, d, 0)$. Si assumano come coordinate lagrangiane le coordinate y e z del baricentro e e l'angolo θ che la diagonale AC forma con l'asse y, come in figura. Si scrivano la Lagrangiana del sistema, le equazioni di Eulero-Lagrange e le si risolvano.



<u>ESERCIZIO 4.</u> In un piano orizzontale sono poste due aste sottili A_1B_1 e A_2B_2 di rispettive masse M_1 e M_2 (distribuzione di massa omogenea) e lunghezze L_1 e L_2. Le aste sono libere di ruotare attorno ai rispettivi baricentri G_1 e G_2, fissi nel piano, con $|\overrightarrow{G_1G_2}| = \ell > 0$. Si supponga che $\ell < \min\{L_1, L_2\}$.

Sia P un punto appartenente all'asta A_1B_1, giacente tra G_1 e A_1, Q un punto appartenente all'asta A_2B_2, giacente tra G_2 e A_2, tali che $|\overrightarrow{G_1P}| = |\overrightarrow{G_2Q}| = r > 0$. Tra i punti P e Q agisce una molla ideale, di costante elastica k.



- Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate Lagrangiane gli angoli θ_1 e θ_2 indicati in figura [Si ricordi che i momenti di inerzia non banali di un'asta sottile omogenea di massa M e lunghezza L attorno al baricentro sono uguali a $I = ML^2/12$.]

- Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange e si determini l'espressione dell'energia conservata.

- Determinare i punti di equilibrio del sistema

- Discutere la stabilità degli equilibri al variare del parametro $\beta = \ell/(2r)$, nei casi in cui $\beta \neq 1$.

- Si consideri il limite in cui $\ell \to 0$: si osservi che il corrispondente sistema Lagrangiano è invariate sotto il gruppo di trasformazioni $(\theta_1, \theta_2) \to (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si determini la carica di Noether corrispondente.

- Nel caso $\ell = 0$, si passi a coordinate 'adattate alla simmetria': $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\Theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Si scriva la Lagrangiana nelle nuove coordinate e si riconosca che Θ è una variabile ciclica. Con il metodo di riduzione di Routh, ci si riduca a un sistema Lagrangiano a un grado di libertà, e lo si risolva per quadrature.