Corsi di laurea in Matematica e Fisica - Anno Accademico 2017/18

FM210 / MA

Prima Prova di Esonero [9-4-2018]

1. Un punto materiale di massa m si muove in una dimensione sotto l'effetto di una forza posizionale, secondo l'equazione

$$m\ddot{x} = \frac{V_0}{\ell}\Big(- \frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x}{\ell} + 1\Big)e^{-x/\ell},$$

dove V_0 e ℓ sono parametri positivi.

(a) Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.

(b) Si disegni il grafico del potenziale. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità. Per i punti di equilibrio stabile, si scriva l'equazione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio e si calcoli la frequenza di oscillazione corrispondente.

(c) Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi $(x, \dot{x})$ e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare dell'energia. Nel caso di moti periodici non banali, si scriva il periodo in termini di un integrale definito. Nel caso di moti aperti, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o no (e se, quindi, la soluzione è globale nel tempo o no).

Soluzioni.

(a) La forza è conservativa con potenziale $U(x)$ tale che

$$U'(x) = \frac{V_0}{\ell}\Big(\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{x}{\ell} - 1\Big)e^{-x/\ell}.$$

Integrando tale relazione troviamo

$$U(x) = \frac{V_0}{\ell}\int^x \Big(\frac{y^2}{\ell^2} - \frac{y}{\ell} - 1\Big)e^{-y/\ell}dy = -V_0\Big(\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x}{\ell}\Big)e^{-x/\ell}.$$

Il sistema ammette quindi come grandezza conservata l'energia meccanica

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x).$$

Verifichiamone esplicitamente la conservazione: derivando E rispetto al tempo troviamo

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + U'(x)\dot{x},$$

che è uguale a zero, poichè $m\ddot{x} = -U'(x)$.

(b) Studiamo la funzione $U(x)$.

• Ai bordi del dominio di definizione: $\lim_{x\to-\infty} U(x) = -\infty$, e $\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0$.

• Segno della funzione: $U(x)$ si annulla in $x = 0$ e in $x = -\ell$; è positiva per $-\ell < x < 0$; è negativa per $x < -\ell$ e per $x > 0$.

• Segno della derivata: $U'(x) = \frac{V_0}{\ell}\left(\frac{x^2}{\ell^2} - \frac{x}{\ell} - 1\right)e^{-x/\ell}$ si annulla in $x = x_{1,2}$, dove $x_1 = \frac{\ell}{2}(1 + \sqrt{5})$ e $x_2 = \frac{\ell}{2}(1 - \sqrt{5})$; è positiva per $x < x_2$ e per $x > x_1$; è negativa per $x_2 < x < x_1$.

Il grafico qualitativo di U è mostrato in figura 1.

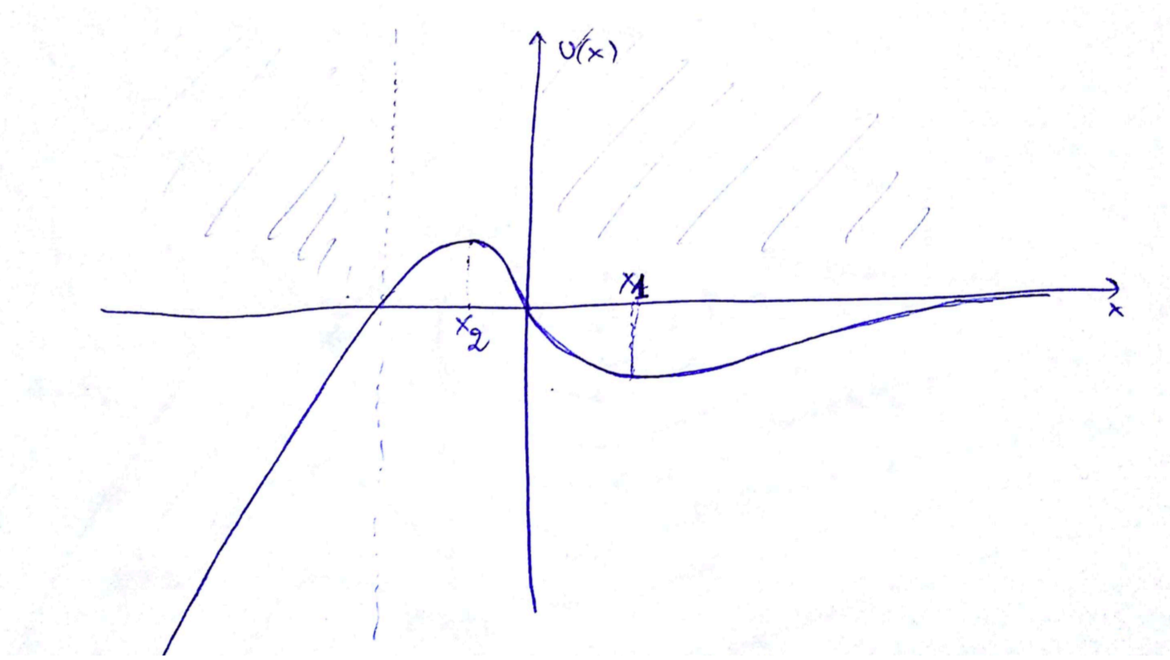

Figura 1: Grafico del potenziale $U(x)$.

I punti di equilibrio sono x_2 (instabile, pocihè massimo locale di U) e x_1 (stabile, poichè minimo locale di U). L'equazione delle piccole oscillazioni attorno a x_1 è $m\ddot{x} = -U''(x_1)\,(x - x_1)$, con

$$U''(x_1) = \frac{V_0}{\ell^2}\Big(-\frac{x^2}{\ell^2} + 3\frac{x}{\ell}\Big)e^{-x/\ell}\Big|_{x=\frac{\ell}{2}(1+\sqrt{5})} = \frac{V_0}{\ell^2}\sqrt{5}e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

La frequenza angolare delle piccole oscillazioni è quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(x_1)}{m}} = \sqrt{\frac{V_0}{m\ell^2}}5^{1/4}e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}.$$

(c) Il grafico delle curve di livello $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$ sul piano delle fasi $(x, \dot{x})$ al variare dell'energia E è mostrato in figura 2.

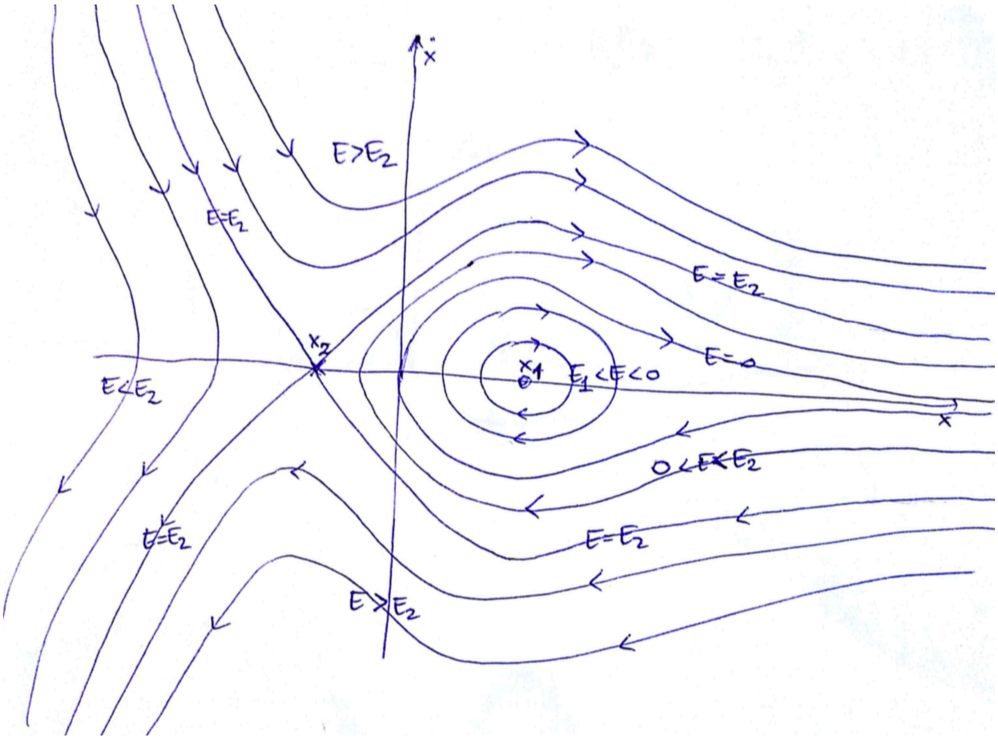

Figura 2: Grafico delle curve di livello associate a $U(x)$, al variare dell'energia E.

A seconda della scelta del livello energetico e del dato iniziale, ci sono diversi moti possibili. Chiamiamo $E_1 := U(x_1)$ e $E_2 := U(x_2)$.

- Moti 'banali' sui punti di equilibrio: $x(t) \equiv x_1$ e $x(t) \equiv x_2$.
- Se $E_1 < E < 0$ e $x(0) > 0$, il moto è periodico e consiste in oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile, di periodo

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}},$$

  dove $x_\pm$ sono le due radici positive di $E = U(x)$, tali che $0 < x_- < x_1 < x_+$.
- Se $0 \leq E < E_2$ e $x(0) > x_2$, il moto è aperto, $x(t)$ tende a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro; a seconda che l'energia sia nulla o positiva, il punto raggiunge l'infinito con velocità nulla o positiva. Il tempo di fuga all'infinito da un punto della traiettoria $x' > x_2$ è

$$t_{+\infty} = \int_{x'}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}},$$

  che è infinito, poichè $U(x)$ si comporta asintoticamente per x grandi come $U(x) \sim -V_0 \frac{x^2}{\ell^2} e^{-x/\ell}$, cosicchè la funzione integranda si comporta asintoticamente per x grandi e positivi come: $\sim$

$\sqrt{\frac{m}{2E}}$, se $E > 0$, o $\sim \sqrt{\frac{m\ell^2}{2V_0}} \frac{e^{x/(2\ell)}}{x}$, se $E = 0$; in entrambi i casi, tali funzioni non sono integrabili a $+\infty$, e quindi $t_{+\infty} = +\infty$: di conseguenza i moti aperti in discussione sono definiti globalmente nel tempo.

- Se $E < E_2$ e $x(0) < x_2$, il moto è aperto, $x(t)$ tende a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro. Il tempo di fuga all'infinito da un punto della traiettoria $x'' < x_2$ è

$$t_{-\infty} = \int_{-\infty}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}},$$

che è finito, poichè $U(x)$ si comporta asintoticamente per x grandi e negativi come $U(x) \sim -V_0 \frac{x^2}{\ell^2} e^{-x/\ell}$, cosicchè la funzione integranda si comporta asintoticamente per x grandi e negativi come $\sim \sqrt{\frac{m\ell^2}{2V_0}} \frac{e^{x/(2\ell)}}{x}$, che è integrabile a $-\infty$, e quindi $t_{-\infty} < +\infty$: di conseguenza i moti aperti in discussione non sono definiti globalmente nel tempo.

- Se $E = E_2$ e $x(0) > x_2$, il moto è aperto, $x(t)$ tende a $+\infty$ nel futuro e a x_2 nel passato, o viceversa; visto che il tempo per raggiungere $+\infty$ è infinito, la soluzione è globale nel tempo.
- Se $E = E_2$ e $x(0) < x_2$, il moto è aperto, $x(t)$ tende a $-\infty$ nel futuro e a x_2 nel passato, o viceversa; visto che il tempo per raggiungere $-\infty$ è finito, la soluzione non è globale nel tempo.
- Se $E > E_2$, il moto è aperto, $x(t)$ tende a $+\infty$ nel futuro e a $-\infty$ nel passato, o viceversa; visto che il tempo per raggiungere $-\infty$ è finito, la soluzione non è globale nel tempo.

2. Il moto di una particella di massa m in $\mathbb{R}^3$ è soggetto a una forza centrale associata all'energia potenziale $U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$, con

$$V(\rho) = V_0\Big(- \log(1 + \frac{r_0^2}{\rho^2}) + \frac{r_0^2}{\rho^2 + r_0^2}\Big),$$

dove V_0 e r_0 sono parametri positivi.

(a) Si scriva l'equazione del moto e si determinino le grandezze conservate ad essa associate.

(b) Supponendo il momento angolare diverso da zero, si descriva il sistema in coordinate polari sul piano ortogonale a $\mathbf{L}$: si scriva l'equazione del moto per la variabile radiale e si determini il potenziale efficace corrispondente.

(c) Si disegni il grafico del potenziale efficace, al variare del modulo L del momento angolare.

(d) Si disegni il grafico delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot\rho)$, al variare dell'energia meccanica E e di L.

(e) Si discuta la natura qualitativa del moto radiale, al variare di E e di L.

(f) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (eventualmente in termini di un integrale definito).

(g) Nel caso di moti aperti, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o no (e se, quindi, la soluzione è globale nel tempo o no).

Soluzioni.

(a) L'equazione del moto ha la forma $m\ddot{\mathbf{r}} = F(|\mathbf{r}|)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, con $F(\rho) = -V'(\rho) = -2\frac{V_0}{\rho}\frac{r_0^4}{(\rho^2+r_0^2)^2}$, cosicchè

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -2\frac{V_0}{|\mathbf{r}|^2}\frac{r_0^4}{(|\mathbf{r}|^2 + r_0^2)^2}\mathbf{r}.$$

Tale equazione è associata a quattro grandezze conservate: l'energia

$$E = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(|\mathbf{r}|),$$

e le tre componenti del momento angolare,

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}.$$

(b) Come discusso a lezione, la conservazione della direzione del momento angolare impone che $\mathbf{r}$ e $\dot{\mathbf{r}}$ appartengano a ogni istante al piano perpendicolare a $\mathbf{L}$ e passante per il centro della forza. Il moto si svolge quindi su tale piano. Passando a coordinate polari ρ, θ su tale piano, l'equazione per la variabile radiale è $m\ddot\rho = -V'_{eff}(\rho)$, dove

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + V_0\Big(- \log(1 + \frac{r_0^2}{\rho^2}) + \frac{r_0^2}{\rho^2 + r_0^2}\Big).$$

(c) Studiamo la funzione $V_{eff}(\rho)$ per $\rho > 0$, nel caso $L > 0$. Comportamento ai bordi del dominio di definizione: $V_{eff}(\rho) \to \infty$ per $\rho \to 0^+$, e $V_{eff}(\rho) \to 0$ per $\rho \to +\infty$; si noti, in particolare, che, per $\rho \to \infty$, $V_{eff}(\rho) \sim \frac{L^2}{2m\rho^2}$, quindi $V_{eff}(\rho)$ tende a zero da valori positivi per $\rho \to \infty$. Quindi la derivata di V_{eff} è negativa sia per valori piccoli che per valori grandi. Per stabilire se la funzione ammette minimi e massimi locali per valori intermedi di ρ, determiniamo quanti punti critici ha, e studiamo quindi l'equazione

$$V'_{eff}(\rho) = -\frac{L^2}{m\rho^3} + 2\frac{V_0}{\rho}\frac{r_0^4}{(\rho^2 + r_0^2)^2} = 0,$$

che può essere riscritta nella forma

$$\frac{\rho^4}{r_0^4} + 2\Big(1 - \frac{mV_0 r_0^2}{L^2}\Big)\frac{\rho^2}{r_0^2} + 1 = 0,$$

le cui radici positive sono:

$$\rho_1 = r_0\Big[\frac{mV_0 r_0^2}{L^2} - 1 - \sqrt{\Big(\frac{mV_0 r_0^2}{L^2} - 1\Big)^2 - 1}\Big]^{1/2},$$

$$\rho_2 = r_0\Big[\frac{mV_0 r_0^2}{L^2} - 1 + \sqrt{\Big(\frac{mV_0 r_0^2}{L^2} - 1\Big)^2 - 1}\Big]^{1/2},$$

a patto che $\frac{mV_0 r_0^2}{L^2} - 1 > 0$ e che l'espressione sotto radice sia ≥ 0 (in caso contrario non esistono radici positive dell'equazione che stiamo studiando). La condizione che esistano due zeri distinti di $V'_{eff}(\rho)$ è quindi $\frac{mV_0 r_0^2}{L^2} > 2 \Leftrightarrow 0 < L < \sqrt{\frac{mV_0 r_0^2}{2}}$; la condizione che esista un solo zero è $L = \sqrt{\frac{mV_0 r_0^2}{2}}$; la condizione che non ci siano zeri è $L > \sqrt{\frac{mV_0 r_0^2}{2}}$.

Il grafico qualitativo di $V_{eff}(\rho)$ nei tre casi è mostrato in figura 3.

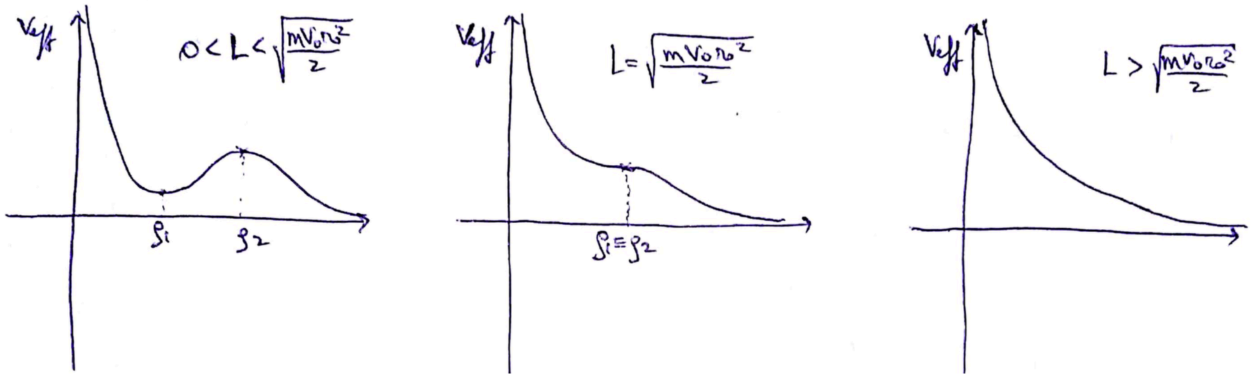

Figura 3: Grafico del potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$, al variare del modulo del momento angolare $L > 0$.

Si noti che il grafico di V_{eff} nel caso $0 < L < \sqrt{\frac{mV_0 r_0^2}{2}}$ è leggermente diverso a seconda che $V_{eff}(\rho_1)$ sia maggiore o minore di zero: nei due casi, il minimo locale in ρ_1 si trova al di sopra o al di sotto della retta delle ascisse (nel secondo caso, quindi, il minimo in ρ_1 è globale). In figura è riportato solo il caso in cui $V_{eff}(\rho_1) > 0$. Si noti comunque che la forma qualitativa delle curve di livello, discussa al punto seguente, non cambia in questi due sottocasi.

(d) Il grafico qualitativo delle curve di livello, al variare di E e di L, è mostrato in figura 4.

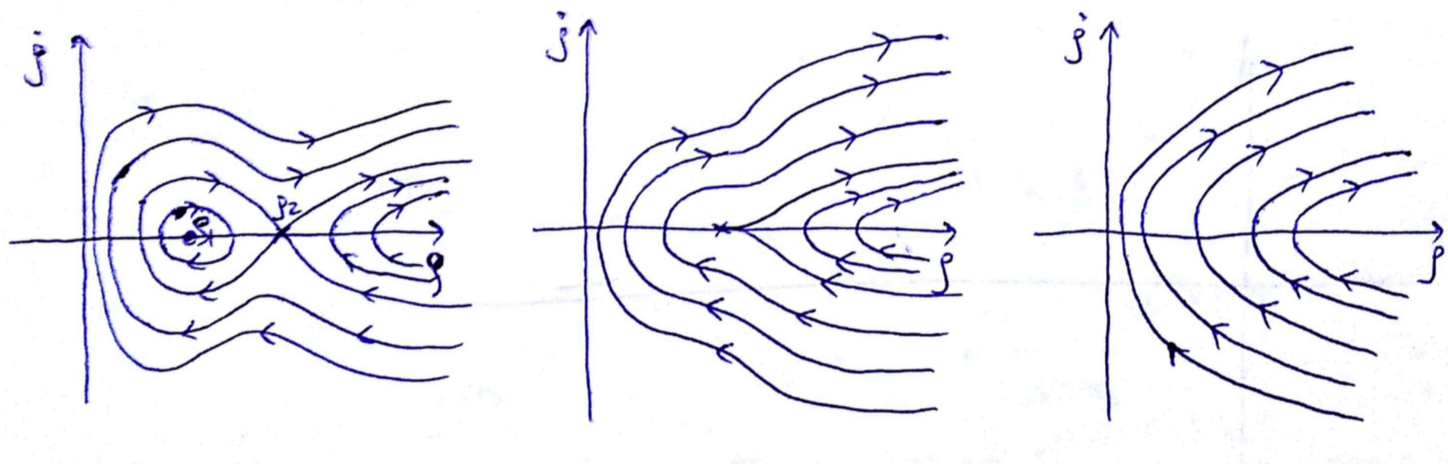

Figura 4: Grafico delle curve di livello associate al potenziale efficace $V_{eff}(\rho)$ al variare di $L > 0$ e dell'energia E.

(e) Al variare di E, L il sistema ammette moti con una diversa natura qualitativa, come discusso nel seguito.

- $0 < L < \sqrt{\frac{mV_0 r_0^2}{2}}$. Oltre ai moti 'banali' sui punti di equilibrio, $\rho(t) \equiv \rho_1$ e $\rho(t) \equiv \rho_2$, il sistema ammette i seguenti moti (chiamo $E_1 := V_{eff}(\rho_1)$ e $E_2 := V_{eff}(\rho_2)$):
  - Per $E_1 < E < E_2$ e $\rho(0) < \rho_2$, il moto radiale è periodico, di periodo
  $$T_0 = 2\int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}},$$
  dove $\rho_\pm$ sono le due radici di $E = V_{eff}(\rho)$, tali che $0 < \rho_- < \rho_1 < \rho_+ < \rho_2$.
  - Per $E < E_2$ e $\rho(0) > \rho_2$ il moto radiale è aperto, e $\rho(t)$ tende all'infinito sia nel passato che nel futuro.
  - Per $E > E_2$ il moto radiale è aperto, e $\rho(t)$ tende all'infinito sia nel passato che nel futuro.
  - Per $E = E_2$ il sistema ammette due tipi di moti critici, oltre al moto banale sul punto di equilibrio instabile: se $\rho(0) < \rho_2$

il moto è limitato e a-periodico, e $\rho(t)$ tende a ρ_2 sia nel passato che nel futuro; se $\rho(0) > \rho_2$, $\rho(t)$ tende a ρ_2 nel passato e all'infinito nel futuro, o viceversa.

- $L = \sqrt{\frac{mV_0 r_0^2}{2}}$ (ricordo che in questo caso $\rho_1 = \rho_2$ e $E_1 = E_2$). Oltre al moto 'banale' sul punto di equilibrio, $\rho(t) \equiv \rho_1$, il sistema ammette i seguenti moti:
  - Per $E > 0$ e $E \neq E_1$, il moto radiale è aperto, e $\rho(t)$ tende all'infinito sia nel passato che nel futuro.
  - Per $E = E_1$ e $\rho(0) > \rho_1$, $\rho(t)$ tende a ρ_1 nel passato e all'infinito nel futuro, o viceversa.
- $L > \sqrt{\frac{mV_0 r_0^2}{2}}$. Tutti i moti radiali sono aperti: $\rho(t)$ tende all'infinito sia nel passato che nel futuro.

(f) Il moto complessivo è periodico in due casi:

- Se il moto di $\rho(t)$ è banale, della forma $\rho(t) \equiv \rho_{eq}$ (con ρ_{eq} un punto di equilibrio, cioè $= \rho_1$ o $= \rho_2$ nel caso $0 < L < \sqrt{\frac{mV_0 r_0^2}{2}}$, o $= \rho_1 = \rho_2$ nel caso $L = \sqrt{\frac{mV_0 r_0^2}{2}}$), nel qual caso il moto complessivo è circolare uniforme, con periodo

$$T = \frac{2\pi m \rho_{eq}^2}{L}.$$

- se $\rho(t)$ è periodico non banale (cosa che si verifica per $0 < L < \sqrt{\frac{mV_0 r_0^2}{2}}$, nel caso in cui $E_1 < E < E_2$ e $\rho(0) < \rho_2$), nel qual caso il moto complessivo è periodico o quasi-periodico, a seconda che il rapporto tra il periodo T_0 del moto radiale e il secondo periodo T_1 del moto angolare sia razionale o irrazionale; il moto complessivo è quindi periodico nel caso in cui

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{\pi} \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{L}{m\rho^2} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(\rho))}} = \frac{n}{m},$$

  per una coppia di n, m interi e primi tra loro; tale condizione si verifica per una scelta densa (ma di misura nulla) di valori di E, L; nel caso in cui sia verificata, il periodo del moto complessivo è $T = mT_0 = nT_1$.

(g) Visto che il potenziale efficace è limitato dal basso, tutte le soluzioni sono globali nel tempo, come discusso a lezione (è infatti evidente che in questo caso che il tempo di fuga all'infinito è sempre infinito - dettagli lasciati al lettore).