

FM210 / MA

PRIMA PROVA DI ESONERO [9-4-2018]

1. Un punto materiale di massa m si muove in una dimensione sotto l'effetto di una forza posizionale, secondo l'equazione

$$m\ddot{x} = \frac{V_0}{\ell} \left(-\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x}{\ell} + 1 \right) e^{-x/\ell},$$

dove V_0 e ℓ sono parametri positivi.

- (a) Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
 - (b) Si disegni il grafico del potenziale. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità. Per i punti di equilibrio stabile, si scriva l'equazione delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio e si calcoli la frequenza di oscillazione corrispondente.
 - (c) Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi (x, \dot{x}) e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare dell'energia. Nel caso di moti periodici non banali, si scriva il periodo in termini di un integrale definito. Nel caso di moti aperti, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o no (e se, quindi, la soluzione è globale nel tempo o no).
2. Il moto di una particella di massa m in \mathbb{R}^3 è soggetto a una forza centrale associata all'energia potenziale $U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$, con

$$V(\rho) = V_0 \left(-\log\left(1 + \frac{r_0^2}{\rho^2}\right) + \frac{r_0^2}{\rho^2 + r_0^2} \right),$$

dove V_0 e r_0 sono parametri positivi.

- (a) Si scriva l'equazione del moto e si determinino le grandezze conservate ad essa associate.
- (b) Supponendo il momento angolare diverso da zero, si descriva il sistema in coordinate polari sul piano ortogonale a \mathbf{L} : si scriva l'equazione del moto per la variabile radiale e si determini il potenziale efficace corrispondente.
- (c) Si disegni il grafico del potenziale efficace, al variare del modulo L del momento angolare.
- (d) Si disegni il grafico delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare dell'energia meccanica E e di L .
- (e) Si discuta la natura qualitativa del moto radiale, al variare di E e di L .
- (f) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (eventualmente in termini di un integrale definito).
- (g) Nel caso di moti aperti, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o no (e se, quindi, la soluzione è globale nel tempo o no).