

FM210 / MA

SECONDA PROVA DI ESONERO [28-5-2018]

1. Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali, rettilinee, omogenee, pesanti, di massa M e lunghezza ℓ , vincolate a muoversi su un piano verticale e incernierate in modo da avere l'estremo B in comune. La sbarra AB ha l'estremo A fissato nell'origine degli assi cartesiani O , mentre l'estremo C della sbarra BC è vincolato a scorrere sulla retta verticale passante per O , come descritto in figura. Oltre alla forza gravitazionale, il sistema è soggetto a una forza elastica di costante elastica k , che agisce su C e ha centro in O .

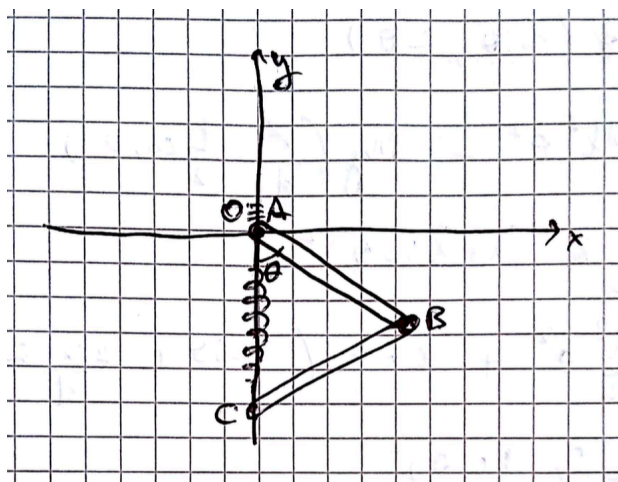


Figura 1: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

Tutti i vincoli sono supposti ideali. Si usi come coordinata Lagrangiana l'angolo θ mostrato in figura.

- (a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
- (b) Identificare l'energia generalizzata e verificarne esplicitamente la conservazione.
- (c) Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità, al variare di k .
- (d) **Facoltativo:** Ricavare la soluzione per quadrature dell'equazione del moto, e discuterne la natura qualitativa al variare di k e dell'energia generalizzata.

2. Si consideri il sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{q^4}{4} e^{-2p/q}.$$

- (a) Scrivere le equazioni di Hamilton.
- (b) Si determini la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q, P) = \frac{q^2}{2} \log P$ e se ne calcoli l'inversa, specificando il dominio della trasformazione diretta e inversa.
- (c) Si verifichi esplicitamente che la trasformazione determinata al punto precedente è canonica, calcolando le parentesi di Poisson fondamentali.
- (d) Si determini l'Hamiltoniana nelle nuove variabili Q, P . Si calcolino e risolvano le corrispondenti equazioni di Hamilton.
- (e) Si usi la trasformazione determinata sopra, nonché la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili (Q, P) , per risolvere le equazioni del moto originali per le variabili (q, p) , in corrispondenza dei dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.