FM210 / MA

SECONDA PROVA DI ESONERO [28-5-2018]

1. Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali, rettilinee, omogenee, pesanti, di massa M e lunghezza ℓ, vincolate a muoversi su un piano verticale e incernierate in modo da a avere l'estremo B in comune. La sbarra AB ha l'estremo A fissato nell'origine degli assi cartesiani O, mentre l'estremo C della sbarra BC è vincolato a scorrere sulla retta verticale passante per O, come descritto in figura. Oltre alla forza gravitazionale, il sistema è soggetto a una forza elastica di costante elastica k, che agisce su C e ha centro in O.

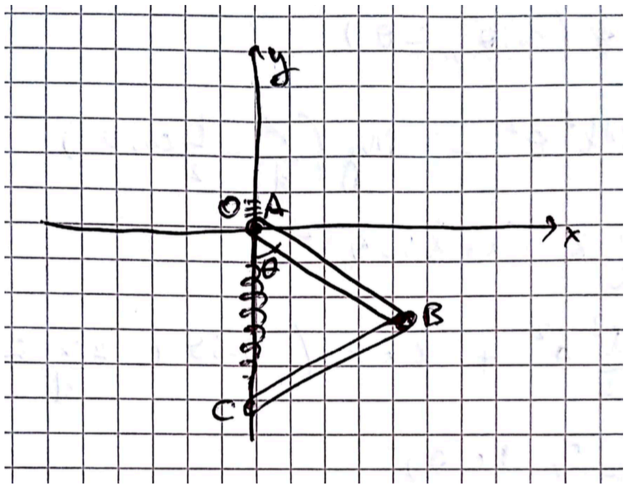

Figura 1: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

Tutti i vincoli sono supposti ideali. Si usi come coordinata Lagrangiana l'angolo θ mostrato in figura.

(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.

(b) Identificare l'energia generalizzata e verificarne esplicitamente la conservazione.

(c) Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità, al variare di k.

(d) **Facoltativo**: Ricavare la soluzione per quadrature dell'equazione del moto, e discuterne la natura qualitativa al variare di k e dell'energia generalizzata.

SOLUZIONE.

(a) Per scrivere la Lagrangiana del sistema occorre calcolare l'energia cinetica e potenziale del sistema nella coordinata Lagrangiane θ assegnata.

Energia cinetica. L'energia cinetica totale è la somma delle energie cinetiche delle due aste, ognuna delle quali, usando il teorema di König, è la somma dell'energia cinetica traslazionale associata al moto del centro di massa e dell'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa. Il centro di massa dell'asta AB è $\mathbf{x}_{G_1} = \frac{\ell}{2}(\sin\theta, -\cos\theta)$, cosicché $\dot{\mathbf{x}}_{G_1} = \frac{\ell}{2}\dot\theta(\cos\theta, \sin\theta)$. Quindi l'energia cinetica dell'asta AB è

$$T_{AB} = \frac{M}{2}|\dot{\mathbf{x}}_{G_1}|^2 + \frac{1}{2}I_{G_1}\dot\theta^2 = \frac{M}{2}\frac{\ell^2}{4}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{12}\dot\theta^2 = \frac{1}{6}M\ell^2\dot\theta^2,$$

dove il termine $\frac{1}{2}I_{G_1}\dot\theta^2$ rappresenta l'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa, e abbiamo usato che $I_{G_1} = \frac{1}{12}M\ell^2$. Analogamente, il centro di massa dell'asta BC è $\mathbf{x}_{G_2} = \frac{\ell}{2}(\sin\theta, -3\cos\theta)$, cosicché $\dot{\mathbf{x}}_{G_1} = \frac{\ell}{2}\dot\theta(\cos\theta, 3\sin\theta)$. Quindi l'energia cinetica dell'asta AB è

$$\begin{aligned} T_{BC} = \frac{M}{2}|\dot{\mathbf{x}}_{G_2}|^2 + \frac{1}{2}I_{G_2}\dot\theta^2 &= \frac{M}{2}\frac{\ell^2}{4}\dot\theta^2(1 + 8\sin^2\theta) + \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{12}\dot\theta^2 \\ &= M\ell^2\dot\theta^2\Big(\frac{1}{6} + \sin^2\theta\Big). \end{aligned}$$

Sommando le due espressioni troviamo l'energia cinetica totale:

$$T = T_{AB} + T_{BC} = M\ell^2\dot\theta^2\Big(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\Big).$$

Energia potenziale. L'energia potenziale è la somma delle energia potenziali gravitazionali delle due aste più l'energia potenziale elastica della molla:

$$\begin{aligned} U &= Mg\Big(-\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{3}{2}\ell\cos\theta\Big) + \frac{1}{2}k(-2\ell\cos\theta)^2 \\ &= -2Mg\ell\cos\theta + 2k\ell^2\cos^2\theta, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che: la coordinata verticale di $\mathbf{x}_{G_1}$ è $-\frac{\ell}{2}\cos\theta$; la coordinata verticale di $\mathbf{x}_{G_2}$ è $-\frac{3}{2}\ell\cos\theta$; le coordinate di C sono $(0, -2\ell\cos\theta)$.

La Lagrangiana del sistema è uguale all'energia cinetica meno l'energia potenziale. Quindi,

$$\mathcal{L}(\theta, \dot\theta) = M\ell^2\dot\theta^2\Big(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\Big) + 2Mg\ell\cos\theta - 2k\ell^2\cos^2\theta,$$

cosicché l'equazione di Eulero-Lagrange è:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big[2M\ell^2\dot\theta\Big(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\Big)\Big] = \\ &\qquad = 2M\ell^2\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta - 2Mg\ell\sin\theta + 4k\ell^2\cos\theta\sin\theta. \end{aligned}$$

Calcolando esplicitamente la derivata a membro di sinistra troviamo:

$$\begin{aligned} &2M\ell^2\ddot\theta\Big(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\Big) = \\ &\qquad = -2M\ell^2\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta - 2Mg\ell\sin\theta + 4k\ell^2\cos\theta\sin\theta. \end{aligned}$$

(b) In un sistema Lagrangiano meccanico, l'energia generalizzata coincide con l'usuale energia meccanica, ovvero con la somma di energia cinetica ed energia potenziale:

$$E = M\ell^2\dot\theta^2\Big(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\Big) - 2Mg\ell\cos\theta + 2k\ell^2\cos^2\theta.$$

Per verificarne la conservazione, calcoliamone la derivata rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E &= 2M\ell^2\dot\theta\ddot\theta\Big(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\Big) + 2M\ell^2\dot\theta^3\sin\theta\cos\theta \\
&+ 2Mg\ell\dot\theta\sin\theta - 4k\ell^2\dot\theta\cos\theta\sin\theta = \\
&= \dot\theta\Big[2M\ell^2\ddot\theta\Big(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\Big) + 2M\ell^2\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta \\
&+ 2Mg\ell\sin\theta - 4k\ell^2\cos\theta\sin\theta\Big].
\end{aligned}$$

Usando l'equazione di Eulero-Lagrange, riconosciamo che l'espressione in parentesi quadre è identicamente nulla, il che dimostra la conservazione dell'energia.

(c) L'equazione per i punti di equilibrio si ottiene ponendo $\dot\theta = 0$ e $\ddot\theta = 0$ nell'equazione di Eulero-Lagrange:

$$0 = -2Mg\ell\sin\theta + 4k\ell^2\cos\theta\sin\theta = 4k\ell^2\sin\theta\Big(\cos\theta - \frac{Mg}{2k\ell}\Big),$$

che è risolta da $\sin\theta = 0$ (ovvero $\theta = 0, \pi$) o, nel caso in cui $0 < \frac{Mg}{2k\ell} \le 1$, anche da $\theta = \pm\arccos\frac{Mg}{2k\ell}$. In conclusione, se $k \le \frac{Mg}{2\ell}$, il sistema ammette due punti di equilibrio, $\theta = 0, \pi$; se $k > \frac{Mg}{2\ell}$, il sistema ammette quattro punti di equilibrio, $\theta = 0, \pi, \pm\arccos\frac{Mg}{2k\ell}$.

Per determinare la stabilità dei punti di equilibrio, stabiliamo se sono punti di massimo o minimo locale dell'energia potenziale $U = U(\theta) = -2Mg\ell\cos\theta + 2k\ell^2\cos^2\theta$. La derivata dell'energia potenziale è

$$U'(\theta) = 4k\ell^2\sin\theta\Big(\frac{Mg}{2k\ell} - \cos\theta\Big).$$

Studiandone il segno, troviamo che: se $k \le \frac{Mg}{2\ell}$, $U'(\theta)$ è positiva per $\theta \in (0, \pi)$ e negativa per $\theta \in (-\pi, 0)$; se $k > \frac{Mg}{2\ell}$, $U'(\theta)$ è positiva per $\theta \in (-\arccos\frac{Mg}{2k\ell}, 0) \cup (\arccos\frac{Mg}{2k\ell}, \pi)$, e negativa per $\theta \in (-\pi, -\arccos\frac{Mg}{2k\ell}) \cup (0, \arccos\frac{Mg}{2k\ell})$.

In conclusione: se $k \le \frac{Mg}{2\ell}$, $\theta = 0$ è punto di equilibrio stabile, in quanto minimo dell'energia potenziale, mentre $\theta = \pi$ è punto di equilibrio instabile, in quanto massimo dell'energia potenziale; se $k > \frac{Mg}{2\ell}$, $\theta = \pm\arccos\frac{Mg}{2k\ell}$) sono punti di equilibrio stabile, in quanto minimi dell'energia potenziale, mentre $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ sono punti di equilibrio instabile, in quanto massimi locali dell'energia potenziale.

(d) La soluzione per quadrature si ottiene integrando per separazione di variabili l'equazione delle curve di livello, che altro non è che l'equazione della conservazione dell'energia:

$$E = M\ell^2\dot\theta^2\Big(\frac{1}{3}+\sin^2\theta\Big)+U(\theta) \quad\Leftrightarrow\quad \dot\theta = \pm\sqrt{\frac{E-U(\theta)}{M\ell^2\Big(\frac{1}{3}+\sin^2\theta\Big)}},$$

da cui si trova la soluzione per quadrature, come inversa funzionale di

$$t = \pm\int_{\theta(0)}^{\theta(t)}\sqrt{\frac{M\ell^2\Big(\frac{1}{3}+\sin^2\theta\Big)}{E-U(\theta)}}dt,$$

con l'usuale convenzione sul segno (il + corrisponde a porzioni di traiettoria nel semipiano positivo dello spazio delle fasi $(\theta,\dot\theta)$, con $\theta>0$, mentre il $-$ corrisponde a porzioni di traiettoria nel semipiano negativo dello spazio delle fasi).

Per discutere la natura qualitativa delle soluzioni, disegnamo il grafico qualitativo dell'energia potenziale e delle curve di livello, la cui forma segue dallo studio del segno della derivata di U discusso sopra:

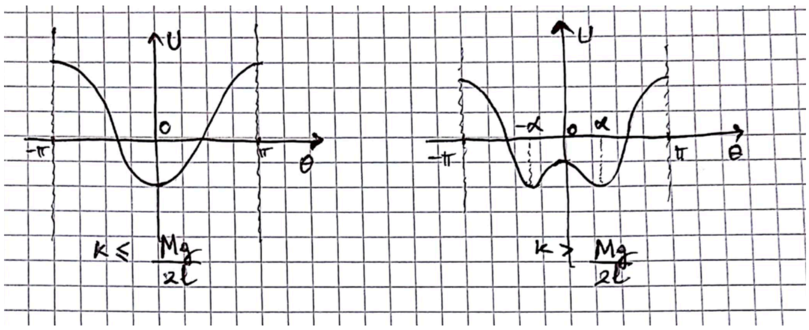

Figura 2: Il grafico qualitativo di U al variare di k. Nella figura di destra, $\alpha := \arccos\frac{Mg}{2k\ell}$.

Come evidente dalla forma delle curve di livello, il sistema ammette diversi tipi di moti a seconda del valore di k e dell'energia:

Se $k \le \frac{Mg}{2\ell}$, il sistema ammette:

- due moti 'banali' sui punti di equilibrio 0 e π: $\theta(t)\equiv 0$ e $\theta(t)\equiv\pi$.
- moti periodici che consistono in oscillazioni di ampiezza minore di 2π attorno al punto di equilibrio stabile, se $U(0)<E<U(\pi)$
- moti a-periodici critici, che tendono asintoticamente nel passato e nel futuro al punto di equilibrio instabile, se $E=U(\pi)$ e $\theta(0)\neq\pi$
- moti periodici che consistono in rotazioni sempre in senso orario, o sempre in senso antiorario, se $E>U(\pi)$.

Se $k > \frac{Mg}{2\ell}$, il sistema ammette:

- quattro moti 'banali' sui punti di equilibrio $0,\pi,\pm\alpha$ (dove $\alpha := \arccos\frac{Mg}{2k\ell}$): $\theta(t)\equiv 0$, $\theta(t)\equiv\pi$, $\theta(t)\equiv\alpha$ e $\theta(t)\equiv-\alpha$.
- moti periodici che consistono in oscillazioni di ampiezza minore di π attorno a α o a $-\alpha$, se $U(\alpha)<E<U(0)$

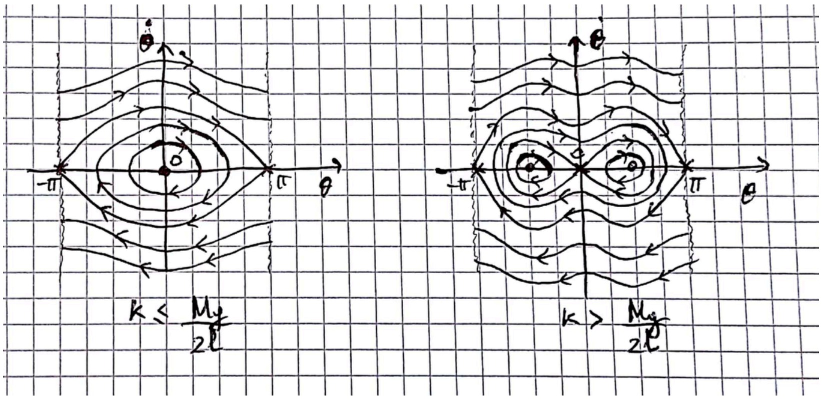

Figura 3: Il grafico qualitativo delle curve di livello $\dot\theta = \pm\sqrt{\frac{E-U(\theta)}{M\ell^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\theta\right)}}$, al variare di k e di E.

- moti a-periodici critici, che tendono asintoticamente nel passato e nel futuro al punto di equilibrio instabile 0, se $E = U(0)$ e $\theta(0) \neq 0$
- moti periodici che consistono in oscillazioni di ampiezza minore di 2π attorno a 0 e a $\pm\alpha$, $U(0) < E < U(\pi)$
- moti a-periodici critici, che tendono asintoticamente nel passato e nel futuro al punto di equilibrio instabile π, se $E = U(\pi)$ e $\theta(0) \neq \pi$
- moti periodici che consistono in rotazioni sempre in senso orario, o sempre in senso antiorario, se $E > U(\pi)$.

2. Si consideri il sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana

$$H(q,p) = \frac{q^4}{4} e^{-2p/q}.$$

(a) Scrivere le equazioni di Hamilton.

(b) Si determini la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q,P) = \frac{q^2}{2}\log P$ e se ne calcoli l'inversa, specificando il dominio della trasformazione diretta e inversa.

(c) Si verifichi esplicitamente che la trasformazione determinata al punto precedente è canonica, calcolando le parentesi di Poisson fondamentali.

(d) Si determini l'Hamiltoniana nelle nuove variabili Q, P. Si calcolino e risolvano le corrispondenti equazioni di Hamilton.

(e) Si usi la trasformazione determinata sopra, nonché la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili (Q,P), per risolvere le equazioni del moto originali per le variabili (q,p), in corrispondenza dei dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 0$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.

SOLUZIONE.

(a) Le equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{q^3}{2} e^{-2p/q} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -e^{-2p/q}(q^3 + pq^2/2). \end{cases}.$$

(b) La trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q,P) = \frac{q^2}{2}\log P$ è tale che

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = q \log P, \qquad Q = \frac{\partial G}{\partial P} = \frac{q^2}{2P},$$

che si può invertire in:

$$\begin{cases} Q = \frac{q^2}{2} e^{-p/q}, \\ P = e^{p/q}, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} q = \sqrt{2QP}, \\ p = \sqrt{2QP}\log P, \end{cases}$$

che è proprio la trasformazione canonica richiesta. Tale trasformazione è invertibile da $(q,p) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ a $(Q,P) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

(c) Per verificare esplicitamente che la trasfornazione trovata al punto precedente è canonica, calcolo la parentesi di Poisson tra $Q = Q(q,p)$ e $P = P(q,p)$ e trovo:

$$\begin{aligned} \{Q,P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \cdot \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= (q + \frac{p}{2}) e^{-p/q} \cdot \frac{1}{q} e^{p/q} - \Big(-\frac{q}{2}\Big) e^{-p/q} \cdot \Big(-\frac{p}{q^2}\Big) e^{p/q} = 1, \end{aligned}$$

il che dimostra che la trasformazione è effettivamente canonica.

(d) L'Hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$\tilde{H}(Q, P) = Q^2,$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{Q} = 0, \\ \dot{P} = -2Q. \end{cases}$$

(e) La soluzione alle equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P) è

$$Q(t) = Q(0), \qquad P(t) = P(0) - 2Q(0)t.$$

I dati iniziali nelle variabili (Q, P) corrispondenti a $q(0) = 1$, $p(0) = 0$ sono: $Q(0) = 1/2$ e $P(0) = 1$. La soluzione $(Q(t), P(t))$ con tale dato iniziale è quindi

$$Q(t) = 1/2, \qquad P(t) = 1 - t.$$

La soluzione nelle variabili originali è

$$q(t) = \sqrt{1-t}, \qquad p(t) = \sqrt{1-t}\log(1-t),$$

che non è globale (è valida per $t < 1$).
Per verificare che tale legge oraria soddisfa le equazioni di Hamilton originali, calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \stackrel{?}{=} -\frac{q^3(t)}{2} e^{-2p(t)/q(t)}, \\ p(t) &= -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \log(1-t) - \frac{1}{\sqrt{1-t}} \stackrel{?}{=} -e^{-2p(t)/q(t)}(q^3(t) + p(t)q^2(t)/2). \end{aligned}$$

Usando che $q(t) = \sqrt{1-t}$ e $p(t) = \sqrt{1-t}\log(1-t)$ (cosicché in particolare $e^{-2q(t)/p(t)} = e^{-2\log(1-t)} = \frac{1}{(1-t)^2}$), si verifica immediatamente che tali relazioni sono verificate, come desiderato.