FM210 / MA - Seconda prova pre-esonero (23-5-2018)

1. Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali AB e BC, rettilinee, omogenee, di massa M e lunghezza ℓ, incernierate tra loro in B. Le due sbarre sono vincolate a muoversi in un piano verticale, mantenendo i loro estremi A e C sull'asse orizzontale x. Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono due forze elastiche di costante elastica k: la prima, di centro $O = (0, 0)$, agisce su A, mentre la seconda, di centro $Q = (2\ell, 0)$, agisce su C. Si usino come coordinate Lagrangiane l'angolo θ che la sbarra AB forma con la verticale discendente, misurato in senso antiorario, e l'ascissa x del punto B. Si suppongano tutti i vincoli come ideali.

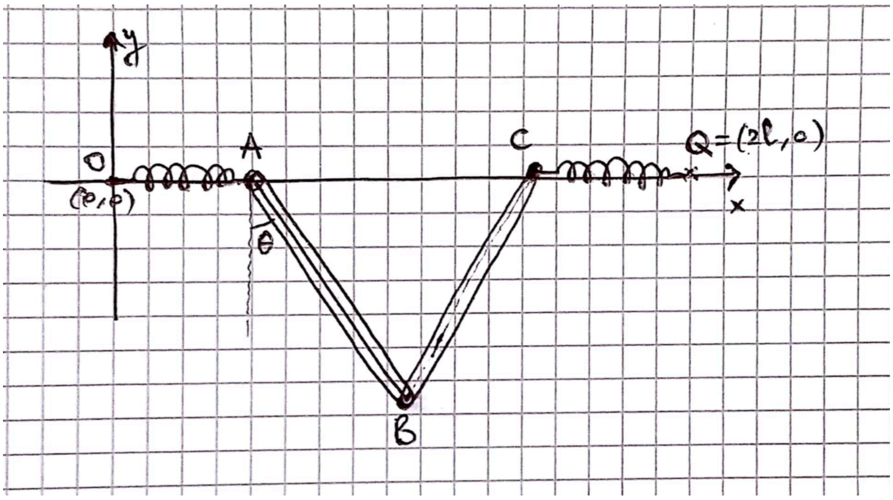

Figura 1: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

(a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.

(b) Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

(c) Si integri il moto per quadrature (più precisamente, si calcoli esplicitamente il moto di x e si riduca alla quadrature quello di θ) e se ne discuta la natura qualitativa.

2. Si considerino le equazioni del moto

$$\begin{cases} \dot{q} = q^2 p \\ \dot{p} = -p^2 q - 1/q, \end{cases}$$

per $q > 0$ e $p \in \mathbb{R}$.

(a) Si riconosca che tale sistema di equazioni è Hamiltoniano e si determini l'Hamiltoniana corrispondente.

(b) Si calcoli la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q, P) = P \log q$

(c) Si determini l'Hamiltoniana nelle nuove variabili Q, P. Si calcolino e risolvano le corrispondenti equazioni di Hamilton.

(d) Si usi la trasformazione determinata sopra, nonché la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili (Q, P), per risolvere le equazioni del moto originali per le variabili (q, p), in corrispondenza dei dati iniziali $q(0) = p(0) = 1$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.