FM210 / MA - Seconda prova pre-esonero (23-5-2018)

1. Un sistema meccanico è costituito da due sbarre uguali AB e BC, rettilinee, omogenee, di massa M e lunghezza ℓ, incernierate tra loro in B. Le due sbarre sono vincolate a muoversi in un piano verticale, mantenendo i loro estremi A e C sull'asse orizzontale x. Oltre alla forza peso, sul sistema agiscono due forze elastiche di costante elastica k: la prima, di centro $O = (0, 0)$, agisce su A, mentre la seconda, di centro $Q = (2\ell, 0)$, agisce su C. Si usino come coordinate Lagrangiane l'angolo θ che la sbarra AB forma con la verticale discendente, misurato in senso antiorario, e l'ascissa x del punto B. Si suppongano tutti i vincoli come ideali.

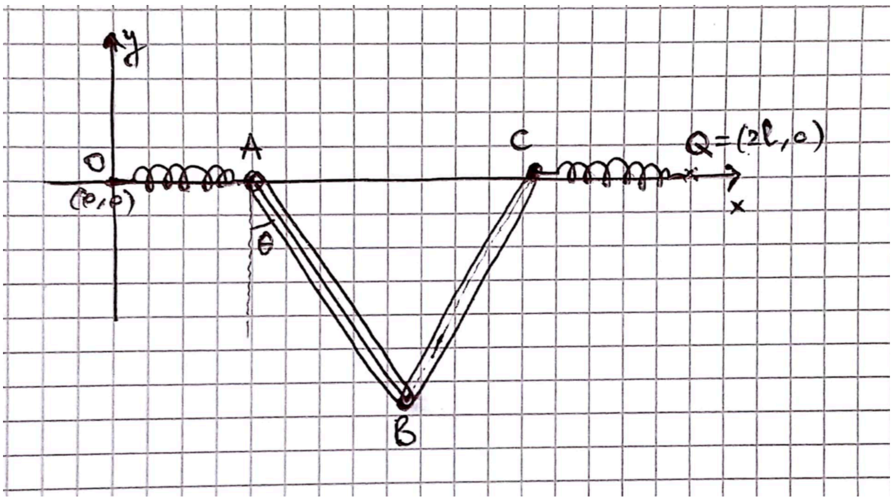

Figura 1: Il sistema di due aste vincolato descritto nel testo.

   (a) Scrivere la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
   (b) Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.
   (c) Si integri il moto per quadrature (più precisamente, si calcoli esplicitamente il moto di x e si riduca alla quadrature quello di θ) e se ne discuta la natura qualitativa.

SOLUZIONE.

   (a) Per scrivere la Lagrangiana del sistema occorre calcolare l'energia cinetica e potenziale del sistema nelle coordinate Lagrangiane x, θ assegnate.

Energia cinetica. L'energia cinetica totale è la somma delle energie cinetiche delle due aste, ognuna delle quali, usando il teorema di König, è la somma dell'energia cinetica traslazionale associata al moto del centro di massa e dell'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa. Il centro di massa dell'asta AB è $\mathbf{x}_{G_1} = (x - \frac{\ell}{2}\sin\theta, -\frac{\ell}{2}\cos\theta)$, cosicché $\dot{\mathbf{x}}_{G_1} = (\dot{x} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta, \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta)$. Quindi l'energia cinetica dell'asta AB è

$$T_{AB} = \frac{M}{2}\big[(\dot{x} - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{4}\ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\big] + \frac{1}{2}I_{G_1}\dot{\theta}^2,$$

dove l'ultimo termine rappresenta l'energia cinetica di rotazione attorno al centro di massa, con $I_{G_1} = \frac{1}{12}M\ell^2$. Analogamente,

$$T_{BC} = \frac{M}{2}\big[(\dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{4}\ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\big] + \frac{1}{2}\frac{M\ell^2}{12}\dot{\theta}^2.$$

Sommando le due espressioni troviamo l'energia cinetica totale:

$$T = T_{AB} + T_{BC} = M\dot{x}^2 + \frac{M\ell^2}{3}\dot{\theta}^2.$$

Energia potenziale. L'energia potenziale è la somma delle energia potenziali gravitazionali delle due aste più l'energia potenziale elastica delle due molle:

$$\begin{aligned} U &= -Mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2}k\big[(x - \ell\sin\theta)^2 + (2\ell - x - \ell\sin\theta)^2\big] \\ &= -Mg\ell\cos\theta + k\big[x^2 - 2\ell x + \ell^2\sin^2\theta - 2\ell^2\sin\theta + 2\ell^2\big]. \end{aligned}$$

La Lagrangiana del sistema è uguale all'energia cinetica meno l'energia potenziale. Quindi, eliminando una costante additiva, che non cambia le equazioni del moto,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \\ &= M\dot{x}^2 + \frac{M\ell^2}{3}\dot{\theta}^2 - k(x^2 - 2\ell x) + Mg\ell\cos\theta + k\ell^2(-\sin^2\theta + 2\sin\theta), \end{aligned}$$

cosicché le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\begin{aligned} &2M\ddot{x} = -2k(x - \ell), \\ &\frac{2M\ell^2}{3}\ddot{\theta} = -Mg\ell\sin\theta + 2k\ell^2(-\sin\theta\cos\theta + \cos\theta). \end{aligned}$$

(b) I punti di equilibrio del sistema si ottengono ponendo i due membri di destra delle equazioni di Eulero-Lagrange uguali a zero: $x_{eq} = \ell$, mentre θ_{eq} è una soluzione dell'equazione

$$Mg \sin\theta = 2k\ell \cos\theta(1 - \sin\theta).$$

Si noti che in corrispondenza delle soluzioni di questa equazione, $\cos\theta \neq 0$ (infatti si vede immediatamente che $\cos\theta = 0$ *non* è soluzione), quindi posso dividere per $\cos\theta$ e riscrivere l'equazione equivalentemente nella forma: $\alpha \tan\theta = 1 - \sin\theta$, con $\alpha = Mg/(2k\ell)$. Per stabilire quante soluzioni ammette tale equazione, possiamo procedere con un metodo grafico: disegnamo il grafico di $\alpha \tan\theta$ e di $1 - \sin\theta$ e contiamo le intersezioni. Si vede immediatamente che l'equazione ammette due soluzioni, $\theta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ e $\theta_2 \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Per determinare la stabilità dei punti di equilibrio, calcoliamo la matrice delle derivate seconde di U:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial(x,\theta)^2}\Big|_{x=\ell,\theta=\theta_i} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k\ell^2(\alpha\cos\theta_i + \cos^2\theta_i - \sin^2\theta_i + \sin\theta_i) \end{pmatrix},$$

dove $i \in \{1, 2\}$ e $\alpha = Mg/(2k\ell)$. Per definizione, $\alpha \tan\theta_i = 1 - \sin\theta_i$; quindi, nell'elemento in basso a destra della matrice delle derivate seconde possiamo rimpiazzare α con $(1-\sin\theta_i)\cos\theta_i/\sin\theta_i$, cosicché tale elemento è uguale a

$$2k\ell^2\Big[\frac{(1-\sin\theta_i)}{\sin\theta_i}\cos^2\theta_i + \cos^2\theta_i - \sin^2\theta_i + \sin\theta_i\Big] = \\ = \frac{2k\ell}{\sin\theta_i}(1 - \sin^3\theta_i),$$

che ha lo stesso segno di $\sin\theta_i$: quindi, ricordando che $\theta_1 \in (0, \pi/2)$ e $\theta_2 \in (\pi, 3\pi/2)$, abbiamo che l'elemento in basso a sinistra della matrice delle derivate seconde è positivo in θ_1 e negativo in θ_2. In conclusione, il punto di equilibrio $(x, \theta) = (\ell, \theta_1)$ è stabile, in quanto corrisponde a un minimo non degenere dell'energia potenziale, mentre (ℓ, θ_2) è instabile, in quanto corrisponde a un punto sella.

(c) L'equazione del moto per la variabile x è quella di un oscillatore armonico: $\ddot{x} = -\frac{k}{M}(x - \ell)$, che è risolta da

$$x(t) = \ell + (x_0 - \ell)\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t),$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$, $x_0 = x(0)$ e $v_0 = \dot{x}(0)$.

L'equazione del moto per la variabile θ è $\ddot{\theta} = -u'(\theta)$, con

$$u(\theta) = \frac{3}{2M\ell^2}(-Mg\ell\cos\theta + k\ell^2(\sin^2\theta - 2\sin\theta)),$$

che è quella di un sistema unidimensionale di massa unitaria e energia potenziale $u(\theta)$. La funzione $u(\theta)$ è periodica di periodo 2π e, per quanto discusso sopra, ha un minimo in θ_1 e un massimo in θ_2: il suo grafico qualitativo è mostrato in Figura 2.

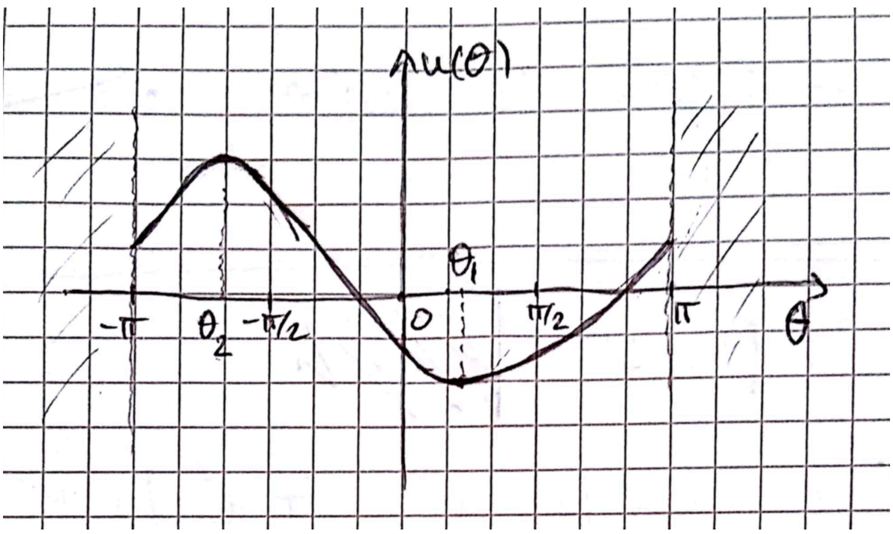

Figura 2: Il grafico di $u(\theta)$.

Le traiettorie del moto nel piano delle fasi ridotto $(\theta, \dot{\theta})$ coincidono con le curve di livello $E' = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + u(\theta)$, al variare di E', e sono mostrate in Figura 3.

Come evidente, le curve di livello hanno qualitativamente la stessa forma di quelle del pendolo matematico, con la differenza che i punti di equilibrio stabile e instabile sono in θ_1, θ_2, piuttosto che in $0, \pi$. In particolare, al variare di E' si ottengono: (1) moti periodici che consistono in oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile, (2) moti periodici che consistono in oscillazioni 'aperte' che si svolgono sempre in senso orario o sempre in senso antiorario, (3) moti aperiodici sulla separatrice, che convergono nel passato e nel futuro al punto di equilibrio instabile, impiegando un tempo infinito per raggiungerlo.

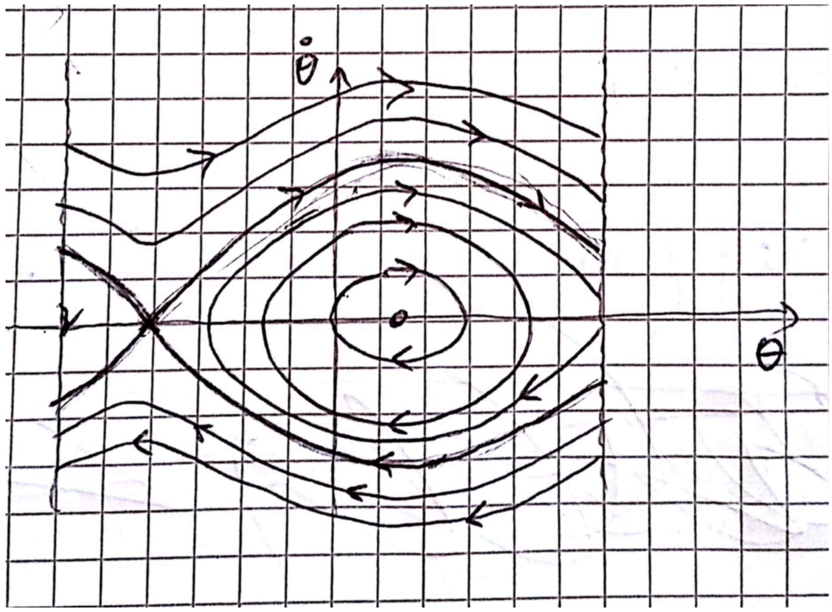

Figura 3: Grafico delle curve di livello $E' = \frac{\dot\theta^2}{2} + u(\theta)$, al variare di E'.

La soluzione per quadrature si ottiene invertendo

$$t = \pm \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E' - u(\theta))}},$$

con l'usuale convenzione per la scelta del segno (il segno positivo si riferixsce a porzioni di traiettoria sul semipiano delle fasi postivo, e viceversa).

2. Si considerino le equazioni del moto

$$\begin{cases} \dot{q} = q^2 p \\ \dot{p} = -p^2 q - 1/q, \end{cases}$$

per $q > 0$ e $p \in \mathbb{R}$.

(a) Si riconosca che tale sistema di equazioni è Hamiltoniano e si determini l'Hamiltoniana corrispondente.

(b) Si calcoli la trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q, P) = P \log q$

(c) Si determini l'Hamiltoniana nelle nuove variabili Q, P. Si calcolino e risolvano le corrispondenti equazioni di Hamilton.

(d) Si usi la trasformazione determinata sopra, nonché la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili (Q, P), per risolvere le equazioni del moto originali per le variabili (q, p), in corrispondenza dei dati iniziali $q(0) = p(0) = 1$. Si verifichi esplicitamente che la soluzione trovata risolve le equazioni del moto originali.

SOLUZIONE.

(a) Il sistema assegnato è Hamiltoniano se e solo se esiste $H(q, p)$ tale che $\partial_p H(q, p) = q^2 p$ e $\partial_q H(q, p) = p^2 q + 1/q$. Integrando le due equazioni troviamo

$$H(q, p) = \frac{q^2 p^2}{2} + \log q.$$

(b) La trasformazione canonica associata alla funzione generatrice di seconda specie $G(q, P) = P \log q$ è tale che

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = \frac{P}{q}, \qquad Q = \frac{\partial G}{\partial P} = \log q,$$

che si può invertire in:

$$\begin{cases} Q = \log q, \\ P = qp, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} q = e^Q, \\ p = Pe^{-Q}, \end{cases}$$

che è proprio la trasformazione canonica richiesta.

(c) L'Hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$\tilde{H}(Q, P) = \frac{P^2}{2} + Q,$$

le cui equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{Q} = P, \\ \dot{P} = -1. \end{cases}$$

(d) La soluzione alle equazioni di Hamilton nelle variabili (Q, P) è

$$P(t) = P(0) - t, \qquad Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{t^2}{2}.$$

I dati iniziali nelle variabili (Q, P) corrispondenti a $q(0) = p(0) = 1$ sono: $Q(0) = \log 1 = 0$ e $P(0) = 1$. La soluzione $(Q(t), P(t))$ con tale dato iniziale è quindi

$$Q(t) = t - \frac{t^2}{2}, \qquad P(t) = 1 - t.$$

La soluzione nelle variabili originali è

$$q(t) = e^{Q(t)} = e^{t - t^2/2}, \qquad p(t) = (1 - t)e^{-t + t^2/2}.$$

Per verificare che tale legge oraria soddisfa le equazioni di Hamilton originali, calcoliamo le derivate:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= (1 - t)e^{t - t^2/2} \stackrel{?}{=} q^2(t)p(t), \\ p(t) &= -e^{-t + t^2/2} - (1 - t)^2 e^{-t + t^2/2} \stackrel{?}{=} -q(t)p^2(t) - \frac{1}{q(t)}. \end{aligned}$$

Usando che $q(t) = e^{t - t^2/2}$ e $p(t) = (1 - t)e^{-t + t^2/2}$ si verifica immediatamente che tali relazioni sono verificate, come desiderato.