

FM210 / MA - Prima prova pre-esonero (4-4-2018)

1. Una particella di massa m si muove in una dimensione sotto l'effetto di una forza posizionale, come descritto dalla seguente equazione:

$$m\ddot{x} = A \frac{x^2 - 2xx_0 - 3x_0^2}{x^4},$$

dove A e x_0 sono parametri positivi e $x \neq 0$.

- (a) Si determini un integrale primo del moto e se ne verifichi esplicitamente la conservazione
- (b) Si disegni il grafico del potenziale. Si determinino i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità. Per i punti di equilibrio stabile, si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio.
- (c) Si disegni il grafico delle curve di livello sul piano delle fasi (x, \dot{x}) e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare della grandezza conservata identificata sopra.
- (d) Si identifichino i dati iniziali che producono moti periodici non banali, e si calcoli il periodo in termini di un integrale definito.
- (e) Nel caso di moti aperti, si discuta se la soluzione corrispondente è definita globalmente nel tempo o no.
- (f) Esistono soluzioni non globali nel tempo? In caso, quali?

2. Il moto di una particella di massa m in \mathbb{R}^3 è descritto dalla seguente equazione del moto associata a una forza centrale:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{2V_0}{r_0^2}e^{-|\mathbf{r}|^2/r_0^2}\mathbf{r},$$

dove V_0 e r_0 sono parametri positivi.

- (a) Si determinino le grandezze conservate e se ne verifichi esplicitamente la conservazione.
- (b) Usando le leggi di conservazione identificate sopra, si osservi che, in generale, il moto si svolge su un piano (quale?). Si descriva il sistema in coordinate polari su tale piano, si scriva l'equazione del moto per la variabile radiale ρ e si determini il potenziale efficace corrispondente
- (c) Si disegni il grafico del potenziale efficace e delle curve di livello nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$, al variare delle grandezze conservate.
- (d) Si determinino i punti di equilibrio del moto radiale e si discuta la natura qualitativa del moto, al variare delle grandezze conservate.
- (e) Si discutano le condizioni per cui il moto complessivo è periodico e se ne calcoli il periodo corrispondente (se necessario, in termini di un integrale definito).
- (f) Si discute se le soluzioni sono tutte globali nel tempo o no.